

銀行・企業間の信用ネットワークの構造と連鎖

藤原 義久^{1,2}

¹ *ATR Laboratories, MIS, Kyoto 619-0288, Japan*

² *Faculty of Integrated Human Studies, Kyoto University, Kyoto 606-8501, Japan*

概要

銀行が企業に対して貸出を行ったり、企業が銀行から借入を行って資金調達を行うのは、銀行は利子収益による将来の利益を期待することに基づいて貸出を行い、一方で企業は将来の成長期待に基づいた金融の源泉として金融機関からの借入を行っているからである。このように、銀行と企業間の信用関係はそれら経済主体が互いに依存し合う関係性を表しているわけであるが、その裏を返せば、一方の経済的脆弱性が他方の経済的状态の悪化に連鎖する可能性が存在していると言える。本論文は、金融をめぐる銀行と企業間の信用関係の依存度に基づいて、脆弱性の伝搬のレベルとロケーション(経路)を定量化するための方法を提案し、過去25年間のデータを用いた信用ネットワークの構造と連鎖を調べる。

JEL: E51, E52, G21

Keywords: Banking, Credit topology, Bipartite network, Systemic risk

本稿の内容は論文 Y. Fujiwara, H. Aoyama, Y. Ikeda, H. Iyetomi and W. Souma, “Structure and temporal change of the credit network between banks and large firms in Japan” (2009) に基づく。

Correspondence: 藤原 義久 (Yoshi Fujiwara). Email: yoshi.fujiwara@gmail.com

I. はじめに

経済主体の関係性の中で、金融機関と企業間の信用の授受の関係性、すなわち信用ネットワーク (credit network) は最も重要なものの一つである。

銀行が企業に対して貸出を行ったり、企業が銀行から借入を行って資金調達を行うのは、銀行は利子収益による将来の利益を期待することに基づいて貸出を行い、一方で企業は将来の成長期待に基づいた金融の源泉として金融機関からの借入を行っているからである。このように、銀行と企業間の信用関係はそれら経済主体が互いに依存し合う関係性を表しているわけであるが、その裏を返せば、一方の経済的脆弱性が他方の経済的状态の悪化に連鎖する可能性が存在する。すなわち、銀行の経済的な脆弱性が企業へ及ぼす影響として、貸出の引き締め、利子率の増加、支払い日程の短縮などが、また企業の脆弱性が銀行に及ぼす影響として、支払いの遅延、債務不履行、倒産などが、信用関係を通じて伝搬し得る。

本稿は、金融をめぐる銀行と企業間の信用関係の依存度に基づいて、脆弱性の伝搬のレベルとロケーション (経路) を定量化するための方法を提案する。その目的のために、国内の大企業と民間金融機関との間の信用ネットワークを解析する。多数の中小企業ではなく、少数の大企業を対象としても不十分ではないのは以下の理由による。

図1は、大企業と中小企業による金融機関からの借入金総額を表している¹。この図の定義と統計によると、国内企業の1.25%(33,833社)が大企業であり、残りの98.75%が中小企業である²。一方、それらごく少数の大企業が約160兆円の借入金総額を占めており、これは多数の中小企業の借入金総額とほぼ等しい。したがって、ごく少数の企業が全体の借入金の約半分を担っていることがこの図から分かる。また、後に示すように、ごく少数の大銀行が全体の貸出金の大部分を供与していることが分かる。

このように、借入金や貸出金は裾野の長い分布を持っており、少数の経済主体が全体の多くの部分を占めているという経済物理学では頻出する状況にある。そのために、破綻とその伝播という問題を考えるにあたって、まず大企業と銀行の信用ネットワークを解析するということは有益である。

仮にある大企業の負債の大部分が金融機関からの借入金から賄われていたとすると、その一つの企業の破綻は債務者である銀行に大きな影響を与え得る。その結果、それらの銀行が企業への貸出金を減少させたり、利子率を引き上げたとするとその影響は別の企業へと及ぶであろう。さらにその影響で企業の業績が悪化してそのうちいくつかは破綻すれば、それは上と同じ金融機関への影響を招くことになる。Stiglitz and Greenwald (2003) を引用すれば、これは

¹データ: 2008年中小企業白書(中小企業庁)。ここで、大企業は資本金1億円以上、中小企業は資本金1億円以下という定義である。なお、年は以下で暦年を用いる。

²データ: 法人企業統計年報(財務省統計局; 1980年から2005年)。

the high rate of bankruptcy is a cause of the high interest rate as much as a consequence of it

ということに他ならない．本稿はこの点を実証的なデータとネットワーク解析を用いて研究することを目的とする．

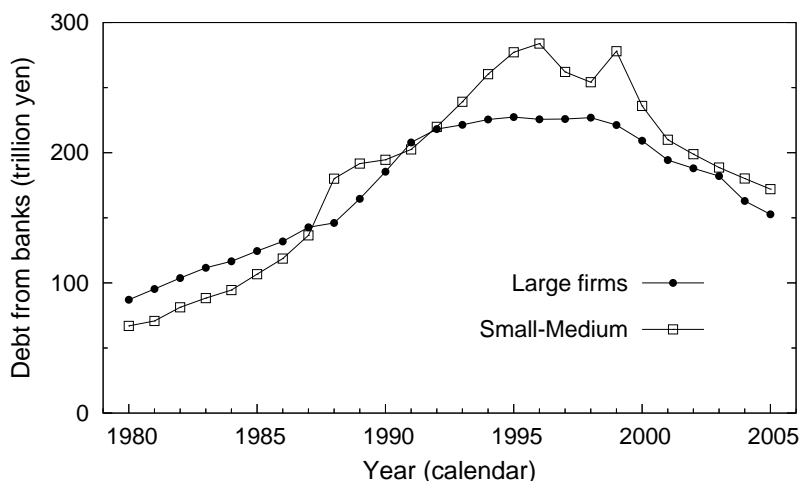


図 1: 1980 年から 2005 年の企業の借入金総額の推移．大企業を で，中小企業を で示す．

データとして同様な対象を研究したのものとして，例えば Ogawa et al. (2007) では，銀行の長期的な信用供与数の企業財務特性への依存性を含めて調べられている．また，Uchida et al. (2008) では企業サイズと信用関係の数の多さの間の関係なども研究されている．Kano et al. (2006) は特に中小企業の借入を中心にした解析が行われている．さらに Ogawa et al. (2007) では，日本における複数信用取引 (multiple lending) の研究も進んでいる．一方，最近のネットワーク科学が社会経済現象へ応用展開されている中で (例えば Caldarelli (2007) とその文献を参照)，金融システムの解析も行われつつある (例えば Inaoka et al. (2004), Iori et al. (2007), De Masi and Gallegati (2007), Imakubo and Soejima (2008), De Masi et al. (2008))．本稿は，銀行と企業間の信用ネットワークを重み付き 2 部グラフとみなして，上で述べた信用破綻や影響という意味での脆弱性について過去 25 年にわたる実証データを基に解析を行うものである．

II 節では用いたデータについて説明する．III.A 節では，重み付き 2 部グラフとして信用ネットワークをみなして，信用ネットワークに関わる裾野の長い分布やネットワーク構造の基本的な統計的性質を明らかにする．III.B 節で，一方の経済主体が他方に及ぼす影響の考察に基づいて，銀行と企業それぞれの脆弱性指標を提案する．また，その指標の計算は重み付き 2 部グラフに付随するある種の固有値問題を解くことによって計算できることを示す．III.C 節ではその計算を，1980 年から 2005 年までの各年のスナップショットのデータに実際に適用する．その結果を日本の金融システムとその変遷から検討した

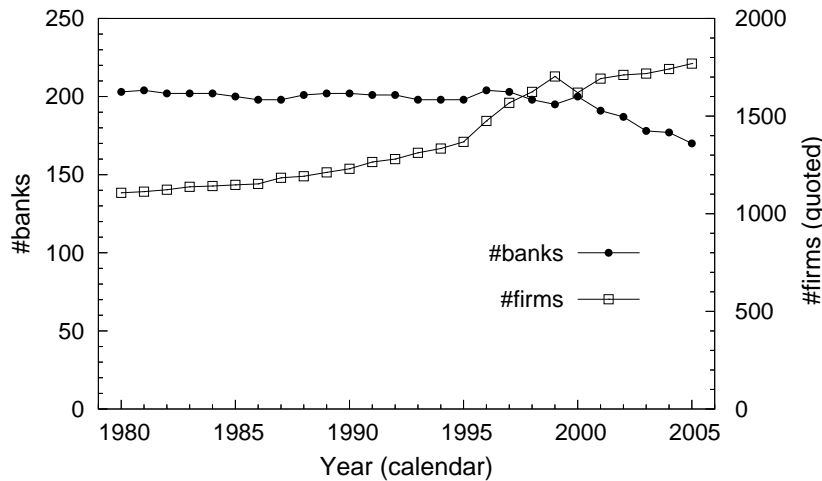


図 2: 金融機関数 (左縦軸) と上場企業数 (右縦軸) の推移 .

ものを IV 節で議論する . V 節は本稿のまとめである . なお , Appendix A は III.B 節の固有値問題に関する数学的な性質の証明である .

II. データ

解析対象は , 日本の証券取引所 (規模順に東京・大阪・名古屋・福岡・札幌) の上場企業による金融機関借入金である . この商用データは企業の財務諸表と日経独自の調査に基づいており , 各企業の金融機関からの短期または長期借入金からなる . この論文は , データが十分に蓄積されている 1980 年から 2005 年までの期間を対象にして , 短期・長期借入金合計を用い , 企業と銀行の間の信用ネットワークの構造とその変化を解析する .

主要な信用の供与元として民間金融機関を考えて , 長期信用銀行 , 都市銀行 , 第一・第二地方銀行 , 信託銀行 , 生保・損保系金融機関 , 信用金庫等 , 農林系金融機関 , 商工中金・その他金融機関を対象とする . 対象の期間中に存在した 200 以上の金融機関の内訳を表 1 にまとめる . 破綻した金融機関はその破綻時までデータ解析に含め , また吸収合併された銀行は整合的にそれらを同定して取り扱った . 一方 , 企業は上記の証券取引所に上場されていて , かつ生存している企業だけを対象にする³ .

図 2 は , 以上のように選択した各暦年の金融機関数と企業数である . 金融機関の分類と企業の主要業種を表 1 と表 2 にそれぞれまとめた .

³生存と上場の条件は , 2007 年 9 月と 12 月のそれぞれの時点で判定した . 店頭市場 (OTC) または JASDAQ (現在の店頭市場) は除外する . データには 1996 年以降 , 各年の OTC または JASDAQ の企業も含まれていてその後上場した企業も含まれるので , 条件に整合的になるように , 各企業の上場年月に基づいて OTC またはそれらを除外する .

id	Classification	#
<i>a</i>	長期信用銀行	3
<i>b</i>	都市銀行	16
<i>c</i>	地方銀行	64
<i>d</i>	第二地銀	71
<i>e</i>	信託銀行	20
<i>f</i>	生命保険会社	23
<i>g</i>	損害保険会社	23
<i>h</i>	信用金庫等	4
<i>i</i>	農林系統機関	4
<i>j</i>	商工中金・その他	1
	Total	229

表 1: 民間金融機関の分類。# は、1980 年から 2005 年の期間における各分類に含まれる金融機関数を表す。左欄の記号、*a* から *j* を分類のための記号として用いる。

manufacturing	#	non-manufacturing	#
食品	105	水産	5
繊維	60	鉱業	7
パルプ・紙	18	建設	148
化学	156	商社	233
医薬品	33	小売業	153
石油	11	証券・保険	18
ゴム	20	その他金融	75
窯業	49	不動産	75
鉄鋼	49	鉄道・バス	27
非鉄金属製品	106	陸運	28
機械	182	海運	15
電気機器	203	空運	4
造船	6	倉庫	38
自動車	65	通信	20
輸送用機器	11	電力	11
精密機器	40	ガス	13
その他製造	82	サービス	264

表 2: データに含まれる上場企業の業種。# は、1980 年から 2005 年の期間における各業種の企業数を表す。全企業数は 2,330 である。

III. 信用ネットワークの解析

A. 重み付き 2 部グラフとしての信用ネットワーク

各時点でのスナップショットとして得られる信用ネットワークは、2 部グラフとして解釈することができる。ノードは銀行または企業のいずれかである⁴。その時点での銀行数を n ，企業数を m として、銀行ノードをギリシャ文字 μ ($\mu = 1, \dots, n$)，企業ノードをラテン文字 i ($i = 1, \dots, m$) で表すことにする。借入すなわち貸出の関係が銀行 μ と企業 i の間にあるとき、ノード μ とノード i の間にリンクが存在すると定義する。さらに、それぞれのリンクは借入金すなわち貸出金の額で定義される正の重みが与えられていると考える。このような重み付き 2 部グラフを図 3 に図示する。

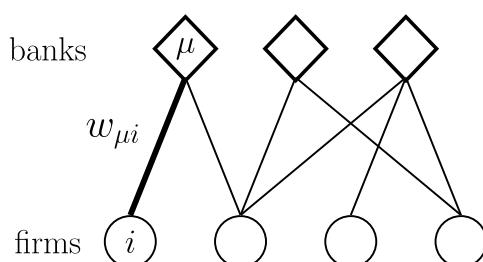


図 3: 2 部グラフとしての信用ネットワーク。銀行 μ と企業 i 間のリンクには、借入金すなわち貸出金額の重みが与えられている。

$w_{\mu i}$ は銀行 μ の企業 i への貸出金であり、同時に企業 i の銀行 μ からの借入金であることから、銀行 μ の貸出総額は

$$w_{\mu} := \sum_i w_{\mu i}, \quad (1)$$

また企業 i による借入総額は

$$w_i := \sum_{\mu} w_{\mu i} \quad (2)$$

に等しい。

まず、同じ金額 $w_{\mu i}$ が銀行 μ と企業 i では相対的に異なる重みを意味していることに注意する。たとえば、銀行 μ の貸出総額の 90%がある企業 i へ集中していたとしても、その企業 i の借入の 20%だけが銀行 μ に依存しているかもしれない。そこで相対的な重みとして、銀行ノードと企業ノードのそれぞれの側で以下の量が自然に考えられる。まず、その成分が

$$A_{\mu i} := \frac{w_{\mu i}}{w_{\mu}}, \quad (3)$$

⁴銀行間の借入・貸出は基本的にはデータに含まれていないので、企業のノードには銀行は含まない。銀行間の信用は、ここで対象とする企業・銀行間信用とともに重要な関係性ではあるが、本論文では対象としない。

で与えられる $(n \times m)$ の行列 A を定義する． $A_{\mu i}$ は銀行 μ にとって，企業 i への貸出の重要性を表すと考えられる．当然に次式が成り立つ．

$$\sum_i A_{\mu i} = 1 \quad \text{for all } \mu . \quad (4)$$

同様に，その成分が

$$B_{i\mu} := \frac{w_{\mu i}}{w_i} , \quad (5)$$

で与えられる $(m \times n)$ の行列 B を定義する． $B_{i\mu}$ は企業 i にとって，銀行 μ からの借入の重要性を表すと考えられる．当然に次式が成立つ．

$$\sum_{\mu} B_{i\mu} = 1 \quad \text{for all } i . \quad (6)$$

銀行 μ の次数 k_{μ} はノード μ から企業へ出ているリンクの総数であり，企業 i の次数 k_i はノード i から銀行へ伸びているリンクの総数である．もし重みがなく， $w_{\mu i}$ がすべて 1 に等しいとすると，明らかに $k_{\mu} = w_{\mu}$ ， $k_i = w_i$ が成り立つ．

w_{μ} ， w_i ， k_{μ} ， k_i の量は裾野の長い分布をもつ．実際，2005 年のデータについてそれらの分布を示したのが，図 4 (a) ~ (d) である．銀行の貸出額 w_{μ} と貸出先数 k_{μ} の分布を，それぞれ図 4 (a) と (c) に示した．それらの裾野部分は，都市銀行，長期信用系の銀行，信託銀行と生保系数社から構成されている (図中の分類番号は表 1 を参照)．同様な裾野部分は企業の借入額 w_i と借入先数 k_i にも見られ，それらを図 4 (b) と (d) に示した．

図 4 (e) に見られるように，当然 w_{μ} と k_{μ} の間には有意な相関があり，図 (f) にある w_i と k_i の間でも同様である．実際，Kendall の τ により順位相関を計算すると，それぞれ $\tau = 0.825(16.0\sigma)$ と $\tau = 0.450(28.3\sigma)$ を得た (σ は統計的独立性の帰無仮説の下での標準誤差) ．

特に，図 4 (e) から経験的な関係性 $k_{\mu} \propto w_{\mu}^a$ が得られる．ここで，指数は $a \approx 0.69 \pm 0.03$ の数値を取る (誤差は最小二乗法による 95% レベル) ．この関係性から， $w_{\mu}/k_{\mu} \propto k_{\mu}^{0.44 \pm 0.07}$ であることが言えるので，この関係は平均貸出額は貸出先が多ければ多いほど，したがって大きな銀行であるほど大きいということを意味する．中小企業での同様な関係については，Uchida et al. (2008) により調べられている．

以上の基本的な統計的性質と，それに加えて信用ネットワークの構造と重み，クラスター構造に関しては De Masi et al. (2008) を参照されたい．

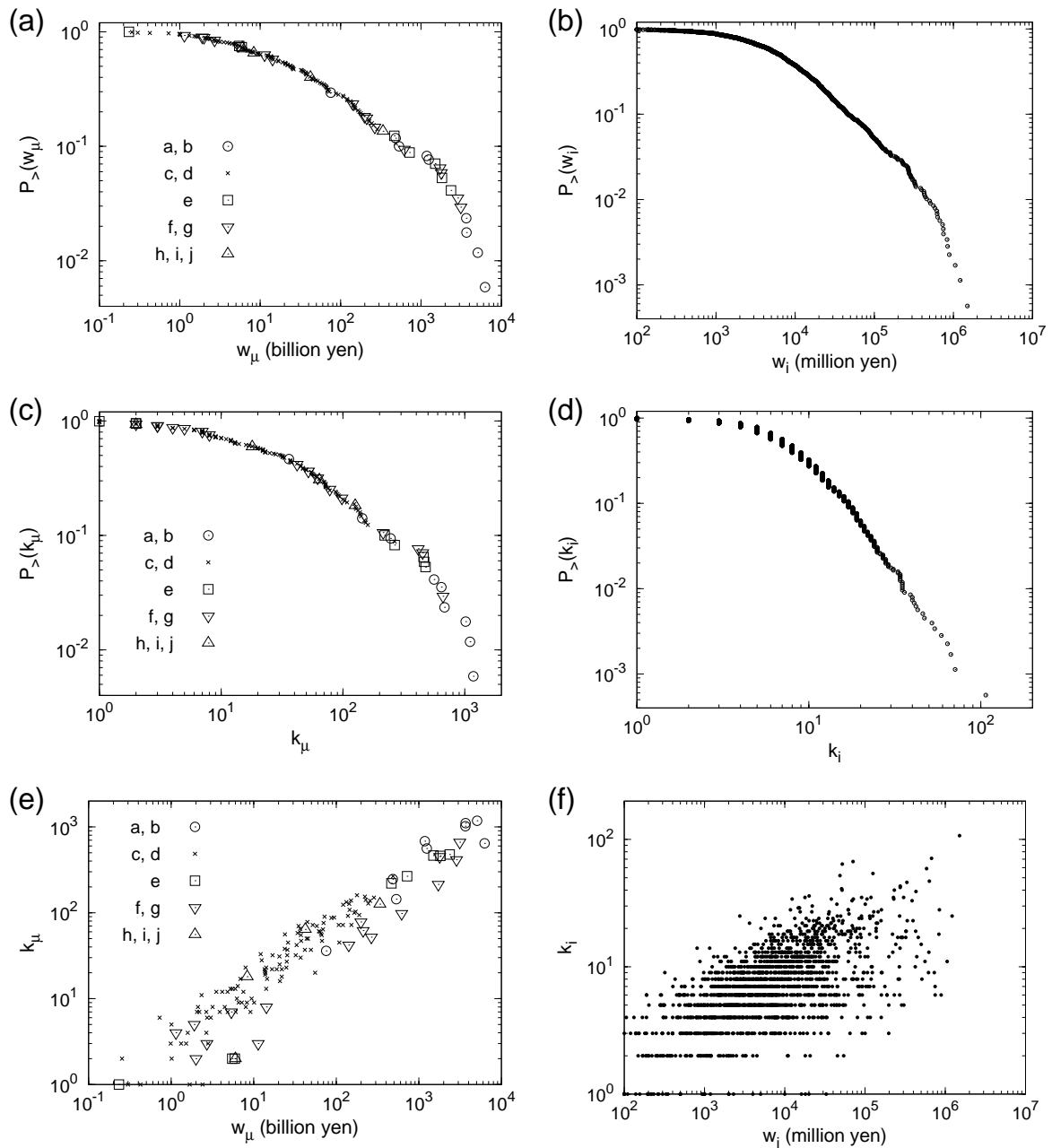


図 4: (a) 銀行の貸出額 w_μ の累積分布 $P_>(w_\mu)$. (b) 企業の借入額の累積分布 $P_>(w_i)$.
 (c) 銀行の貸出先数の累積分布 $P_>(k_\mu)$. (d) 企業の借入先数の累積分布 $P_>(k_i)$.
 (e) 銀行の w_μ と k_μ の散布図. (f) 企業の w_i と k_i の散布図. すべての図は 2005 年のデータ. 銀行についての図 (a)(c)(e) では, 金融機関の分類記号表 1 に従って, 点を区別した. 図 (e) と (f) における順位相関 (Kendall の τ) は, それぞれ $\tau = 0.825(16.0\sigma)$ と $\tau = 0.450(28.3\sigma)$ である (σ は統計的独立性の帰無仮説の下での標準誤差).

B. 銀行のトポロジカルな脆弱性指標

銀行や企業が信用ネットワークを形成していく明らかなインセンティブは次の通りであろう。すなわち、銀行は利子による利潤を期待して信用を供与して、一方で企業はその成長を期待してそのための資金調達源として借入を行っている。したがって、信用ネットワークのリンクは、一方の経済主体の他方の主体への依存関係が以下の2重の意味で顕在化されたものであると考えることができる。

銀行 μ の利潤源が企業 i についてどの程度依存しているかを表す量が $A_{\mu i}$ である。また、企業 i の金融機関からの資金調達が銀行 μ にどの程度依存しているかを表す量が $B_{i\mu}$ であり、これらがリンクを通じた依存関係の第一の意味である。この関係の裏を返せば、次に議論するように、一方の経済主体が他方にどの程度影響を及ぼしうるかという情報がリンクの第二の意味として浮かび上がる。

いま、銀行 μ の財務状況の悪化が、(以下の議論により自己無撞着に決定される量としての) ある変数またはスコアとして x_μ で与えられると考える。 x_μ が増加した銀行 μ は次のような行動をするか、そのインセンティブが高まるだろう。すなわち、供与する貸出総量を規制したり、利率を引き上げたり、企業による返済期限を厳しくしたりすることなどである。いずれにせよ、その結果、企業 i は $B_{i\mu}$ によって定量化できるような程度の影響を受けるだろう。なぜなら、 $B_{i\mu}$ は企業 i の資金調達の銀行 μ への依存度を表しているからである。さらに、企業 i の財務状況の悪化が別のスコア y_i で定量化できると仮定すると、 y_i は量 $B_{i\mu} x_\mu$ をすべての銀行に対して足した量に比例すると考えるのが線形の範囲で自然である。すなわち、銀行から企業への影響は $y_i \propto \sum_{\mu} B_{i\mu} x_\mu$ と表現できると仮定する。図5 (a) はこの伝播の様子を图示したものである。

逆に企業から銀行への影響の伝播も同様である。財務状況の悪化した企業 i は、資金繰りの悪化によって支払いが滞ったり、債務不履行に陥ったり、さらには倒産してしまうなどが考えられる。その結果、資金の貸手である銀行は期待していた利潤を十分に得ることができなかつたり、債権のすべてとは限らないが少なくとも一部を不良債権として持つことになるだろう。いずれにせよ、銀行の財務状況の悪化を招くことになり、その程度は x_μ で定量化できるというのがここでの議論の出発点であった。したがって、企業から銀行への影響は $x_\mu \propto \sum_i A_{\mu i} y_i$ と表現できると考えられる(図5 (b) を参照)。

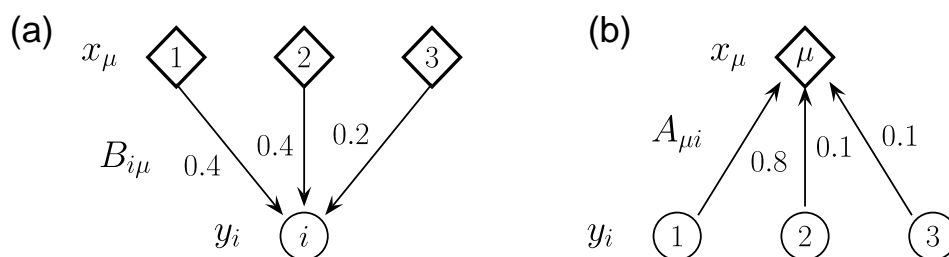


図 5: (a) 銀行から企業 i への影響の例 (式 (6) を満たす重み $B_{i\mu}$ ($\mu = 1, 2, 3$)), (b) 企業から銀行 μ への影響の例 (式 (4) を満たす重み $A_{\mu i}$ ($i = 1, 2, 3$)).

財務状況悪化の程度の変化を財務的な「脆弱性」とよぶことにして，以上の議論をまとめると，一方の脆弱性が他方の脆弱性に及ぼす影響とその逆の影響は次の一組の式で表現できるというのがポイントである：

$$\mathbf{y} \propto \mathbf{B}\mathbf{x} , \quad (7)$$

$$\mathbf{x} \propto \mathbf{A}\mathbf{y} , \quad (8)$$

ここで， \mathbf{x} と \mathbf{y} はその成分がそれぞれ x_μ と y_i であるようなベクトルである．これから直ちに

$$\mathbf{P}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} , \quad (9)$$

を得る．ここで， $\mathbf{P} := \mathbf{A}\mathbf{B}$ であり， λ は固有値， \mathbf{x} は固有ベクトルである． \mathbf{x} は銀行の脆弱性を， \mathbf{y} は企業の脆弱性を表す．

数学的にはもう一つのスコアも定義できる．すなわち

$$\mathbf{v} \propto \mathbf{A}^\top \mathbf{u} , \quad (10)$$

$$\mathbf{u} \propto \mathbf{B}^\top \mathbf{v} , \quad (11)$$

を満たす，銀行 μ に対する量 u_μ と企業 i に対する量 v_i としての双対的なスコアである．これから，もう一つの固有値問題 $\mathbf{P}^\top \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$ ，すなわち

$$\mathbf{u}^\top \mathbf{P} = \lambda \mathbf{u}^\top , \quad (12)$$

が得られる．これ以降， \top は行列の転置を表し，またベクトルは便宜的に縦ベクトルであると仮定する．

したがって，銀行の脆弱性スコア \mathbf{x} は2部グラフの重みから式 (9) により計算できる行列 \mathbf{P} の右固有ベクトルであり，その双対スコア \mathbf{u} は式 (12) から得られる \mathbf{P} の左固有ベクトルである．行列 \mathbf{P} は対称行列ではないので， \mathbf{x} と \mathbf{u} の間には，2部グラフの構造 \mathbf{A} と \mathbf{B} から定義される \mathbf{P} によって決まる自明ではない関係が存在する．Appendix A では，左固有値と右固有値は同じスペクトルを持ち，左固有ベクトル \mathbf{u} は右固有ベクトルから式 (A.5) により計算できることを証明する．そこで以下では，銀行の脆弱性に着目してそのスコア \mathbf{x} だけを考えることにする．

Appendix A で証明する⁵ように固有値と対応する固有ベクトルは以下の数学的性質を持つ．

- λ のスペクトルについて

$$0 < \lambda \leq 1 . \quad (13)$$

⁵この証明は，共同研究者である青山 秀明 氏 (京都大学理学研究科) によるものである．

- 自明な最大固有値:

$$\lambda = 1 \text{ if and only if } x_\mu = \text{constant}. \quad (14)$$

- 固有値の和公式:

$$\sum_k \lambda_k = \sum_{\mu,i} A_{\mu i} B_{i\mu} = \text{tr } \mathbf{P}. \quad (15)$$

影響の伝播という観点から，上の固有値問題の意味を次のように考えることができる．銀行間に，配位 x で与えられるような特定のショックまたは財務状況の変化が起こったとする．そのショックは企業へ式 (7) のように伝播して，企業間に y という配位をもたらす．さらに，その配位は銀行へ式 (8) のように伝播するだろう．そのような伝播が起こる時間スケールの詳細は分からないが，その間に信用ネットワークの構造自体はほとんど変化しないと仮定することは自然だろう．そこで，銀行だけを対象としたときに，企業経由で影響が次々にカスケードしていく過程は，式 (7) と式 (8) の乗算，すなわちある回数 r に対する行列の乗算 \mathbf{P}^r によって表現できる．

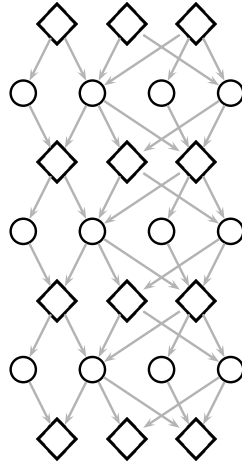


図 6: 銀行の不良状態が企業へ影響を及ぼし，企業の不良状態が銀行へ影響を及ぼし，さらにそれが繰り返される伝播過程の一部．

いま，固有値はその大きさの降順に並んでいるとする:

$$1 = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \cdots \lambda_n > 0. \quad (16)$$

固有ベクトル $\mathbf{x}^{(1)}$ は，連結しているノードすべてに一樣に同じ影響を与える自明なモードであるから，その固有ベクトルが張る空間を除いた補空間を考える．その補空間のベクトルを一般に $\tilde{\mathbf{x}}$ と表して， $\tilde{\mathbf{x}} = \sum_{k=2}^n a_k \mathbf{x}^{(k)}$ のように固有モードで展開すると

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^r \tilde{\mathbf{x}} &= \lambda_2^r a_2 \mathbf{x}^{(2)} + \lambda_3^r a_3 \mathbf{x}^{(3)} + \cdots + \lambda_n^r a_n \mathbf{x}^{(n)} \\ &= \lambda_2^r \left[a_2 \mathbf{x}^{(2)} + \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_2} \right)^r a_3 \mathbf{x}^{(3)} + \cdots + \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_2} \right)^r a_n \mathbf{x}^{(n)} \right], \end{aligned} \quad (17)$$

を得る．この式から分かるように，伝播の繰り返し回数が十分大きい極限 $r \rightarrow \infty$ では，まず第二固有値とそれに対応する固有ベクトルが重要なモードであることがわかる．有限の回数 r でも，より大きな固有値とそれに対応するモードを考えればよいことが分かる．

このようにして，ショックの固有値分解を考えると，ショック自体の配位はあらかじめ不明でも，銀行から企業へ，その逆の影響伝播においてどの固有モードが重要な役割を担うかを解析できる．自明でない固有値の大きさはその伝播の速度，対応する固有ベクトルはその伝播経路についての情報を与える．

C. 解析結果

前節で提案された固有モードの解析では，どこまでの固有値とそれに対応する固有ベクトルを考えればよいのか不明である．そこで， $\lambda_2, \lambda_3, \dots$ と $x^{(2)}, x^{(3)}, \dots$ の有意性を決定するために，ランダム 2 部グラフを次のように生成して，その固有値問題の解と比較することを考える．

1. 銀行 μ と企業 i 間にリンクがあればそれを切断する．元のリンクは二つの切端を持ち，一方は銀行 μ に（銀行切端），他方は企業 i に（企業切端）につながっている．この操作をすべてのリンクについて行う．
2. 銀行 μ から出ている k_μ 本の銀行切端にそれぞれ与えられる重み $w_{\mu i}$ は変更しない．
3. 銀行切端と企業切端を一組ずつランダムに選んで，それらを再接続する．

最後の操作は，銀行と企業間に多重リンクが生成されないように行うものとする．この再接続の結果， μ から i へのリンクがランダムに j へ接続されたとすると， $w_{\mu i} \rightarrow w_{\mu j}$ のように表記が変更されることになる．しかし，任意の μ と i に対して， w_μ, k_μ, k_i の各変数は不変であり， w_i が変更を受けることに注意する．したがって，列のランダムな置換を除けば，行列 A は同じ構造を持ち，行列 B はランダム化される．操作の結果，ランダムグラフでは，各銀行からの貸出総額は一定であるが，異なる企業へ貸出を行っていることになっている．

固有値の和は式 (15) を満たすので，ランダムグラフの固有値スペクトル λ を元の実データと比較するには，適切な規格化を行う必要がある．そこで，規格化された固有値を

$$\tilde{\lambda}_k = \frac{\lambda_k}{\sum_{\ell=1}^n \lambda_\ell}, \quad (18)$$

と定義する．

図 7 (a) は，2005 年の解析により得られた固有値スペクトルの一部である．これを上の操作をモンテカルロ計算により繰り返して生成したランダムグラフの固有値と比較した結果，数個の固有値だけが有意に異なることが分かった．すなわちこの図からそれら

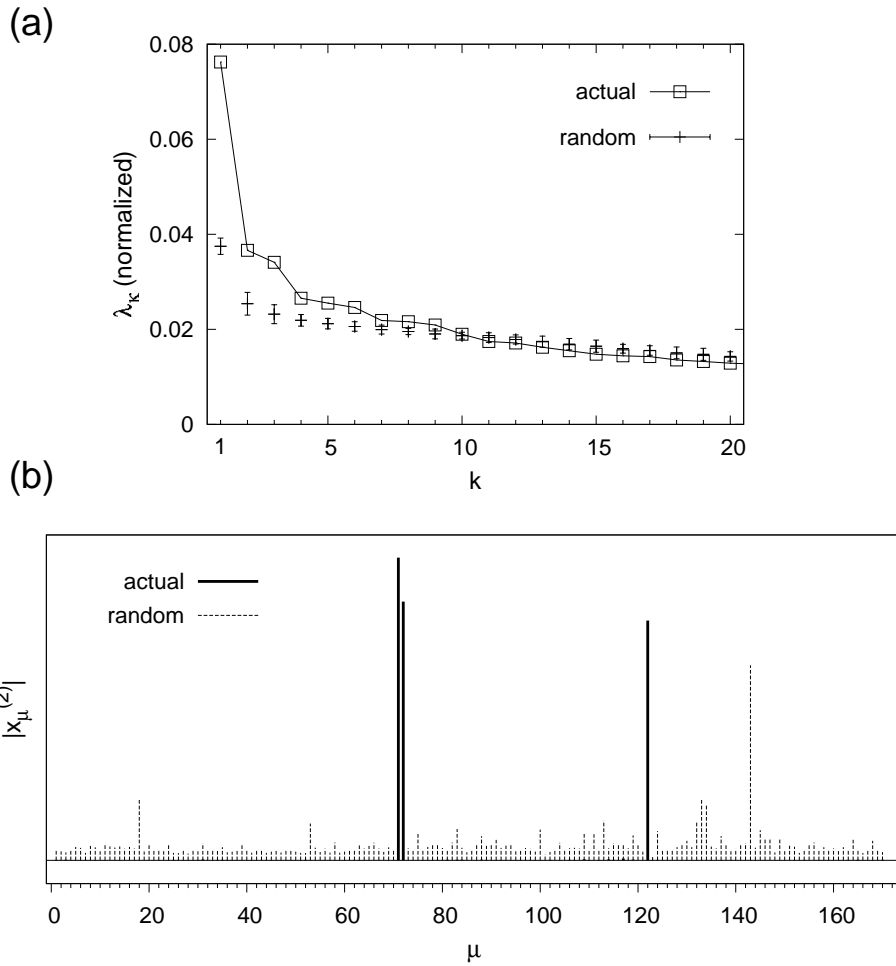


図 7: (a) 式 (18) により定義された $\tilde{\lambda}_k$ の最大 20 個の固有値． は 2005 年の実データの解析． + は 10 回生成したランダムグラフの結果の平均と標準誤差． (b) 2005 年の実データの解析から得られた固有ベクトルの成分 $|x_\mu^{(2)}|$ (実線)． 点線は，成分の絶対値の同じランダムグラフについて平均．

は，自明な $\tilde{\lambda}_1 = (\sum_\ell \lambda_\ell)^{-1}$ を除いて，ほぼ $\tilde{\lambda}_2$ と $\tilde{\lambda}_3$ であり， $\tilde{\lambda}_7$ 以降はランダムグラフと区別できない．

これら少数の有意な固有値に対応する固有ベクトル $x^{(2)}, x^{(3)}, \dots$ は各銀行ごとに成分を持っているわけであるから，それらを例示するには図 7 (b) のように，成分 $|x_\mu^{(2)}|$ をプロットすればよい．この図から明らかなように，特定の銀行に鋭いピークを持っていることが分かる．一方，モンテカルロ計算により得られるランダムグラフに対するプロット (各成分の絶対値を 10 回生成されたランダムグラフについて平均したもの) と比較すると，その違いは明らかである．

特定の銀行に存在する $|x_\mu^{(2)}|$ のこれらのピークは，その成分が w_μ の配位を単純に反映しているわけではないことに注意する．なぜなら，上の操作によるランダム化では w_μ は

まったくその配位に変更を受けていないからである。

また、重みの情報がなくリンクの有無だけを考慮したとすると、各リンクに対して $w_{\mu i} = 1$ ，したがって $w_{\mu} = k_{\mu}$ と $w_i = k_i$ となるが、この場合には得られる固有ベクトルはまったく異なる成分を持っていることが容易に確かめられる。

1980年から2005年のデータに対しての解析結果を以下にまとめる。各年に対して固有値を求めて、その時間変化を見たものが図8である。ここでは、上のランダムグラフとの比較から求めた(自明でない)最大の二つの固有値 λ_2 と λ_3 を式(18)により規格化したものを時系列として示した。これらの固有値は1980年代に鋭いピークを持ち、また1990年に急激に減少している。また、1992年と1997年にそれぞれピークを持っている。

銀行と企業の信用取引は、1980年代から1990年にわたる日本のバブル(不動産とリスク証券への投機的な投資)とその後1990年以降の間に変化してきた。この期間での信用取引の構造には主要な二つの特徴がある。まず、金融自由化や規制緩和により大企業は社債など、市場から直接資金調達を行えるようになり、金融機関からの借入金への依存性が減少したこと。次に、バブル崩壊後に、銀行は大量の不良債権を抱えることになり、その後長年にわたり、信用供給の仲介役としての役割が弱まったこと。不良債権問題は、企業と銀行との信用取引の構造を変化させたと考えられている。実際、バブル期間においては特に単一信用取引(single lending)の割合が高まっていたが、バブル崩壊後の長期低迷期には複数信用取引(multiple lending)が増加した(Ogawa et al., 2007)。そしてバブル崩壊後、1990年代に10年以上にわたる不良債権問題の処理の間に、1997年から約2年間に及び金融危機とその余波を経験することになった。1997年後半と1998年には、大手銀行3社と中小銀行が破綻し、金融システムの安定化政策として2つの大手銀行が国有化されて、大小を問わずほとんどの金融機関が急速に貸出を縮小することになった。特に中小企業への貸出を急激に減少させて、貸渋りや貸し剥がしが行われた。

図8での、1980年代後半の振る舞いと1990年の急激な固有値の変化はここで述べた金融構造の変化と整合的である。自明でない固有値による脆弱性スコアは、企業が単一信用取引に移行した期間には増加した。1997年のピークも、1990年代の不良債権処理の期間中に銀行が貸出を急激に縮小させたことと対応している。すなわち、これらの固有値のピークは、信用取引での借入先や貸出先の多様性の減少として理解できると考えられる。

次に、第2と第3固有値に対応する固有ベクトルの成分が、解析対象の期間中にどの程度安定であったか不安定であったかを調べた結果を示す。どの金融機関が脆弱な経路となり得るかが時間的にどう変化したか、または安定であったかを調べるために、1980年から2005年までに存在してそれぞれの年に解析対象としたすべての金融機関 μ を横軸にとり、 $|x_{\mu}^{(2)}|$ と $|x_{\mu}^{(3)}|$ の平均値とランダムグラフのモンテカルロ計算値との比をとった量を全銀行と全期間(上から下に1980年から2005年)にわたって脆弱性スコアのプロフィールとして表示したものが図9である。 $|x_{\mu}^{(2)}|$ と $|x_{\mu}^{(3)}|$ の平均値をとったのは、固有値問題の構造から最も重要なモードのプロファイルを抜き出すためであり、ランダムグ

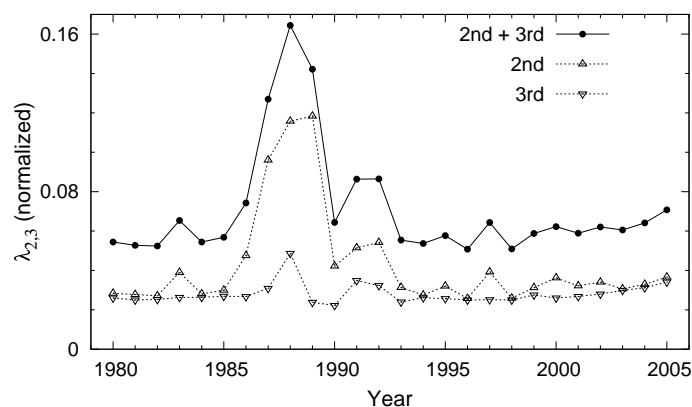


図 8: 1980 年から 2005 年までの規格化された固有値 $\tilde{\lambda}_2$ と $\tilde{\lambda}_3$ の和 (実線) とそれぞれの値 (点線と三角) .

ラフのモンテカルロ計算値との比をとったのはその有意な値だけを取り出すためである。なお、横軸の銀行で退出したものは有意性がゼロと表現して図示しているが、実際にはその位置には数値は存在しない。このようにして全体のプロファイルの変化を調べることができる。

この結果、1980 年代前半まではプロファイルは安定していたが、80 年代後半から大きく構造が変化し、これはバブル期に対応している。バブル崩壊後の 1990 年代も同様に大きく変化している。これらの期間と、また 1997 年と 1998 年にはプロファイル中に少数の銀行にピークが存在している。次節でこれらの結果について議論を行う。

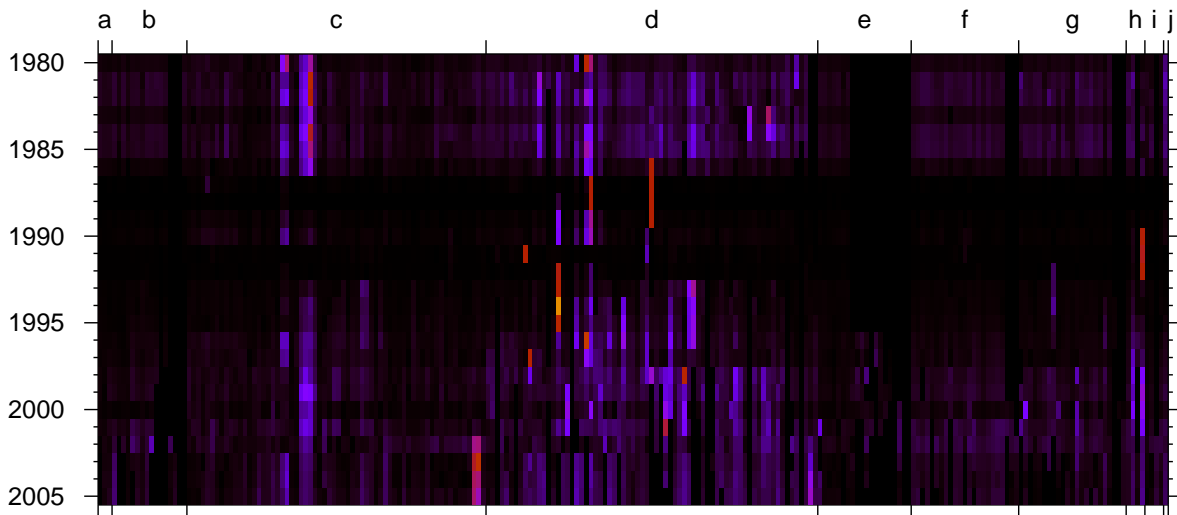


図 9: 1980 年 (縦軸上) から 2005 年 (縦軸下) の期間における, 最大の二つの固有値に対応する固有ベクトル $x^{(2)}$ と $x^{(3)}$. 横軸は銀行を表す; $\mu = 1, \dots, n$ ($n = 229$). 色で $|x_{\mu}^{(2)}|$ と $|x_{\mu}^{(3)}|$ の平均値 (ランダムグラフのモンテカルロ計算値との比較値) を示した. 明るい色がより大きな値を表す. 銀行の分類記号は左の a から右の j までで, その分類は表 1 を参照. [本稿は白黒であるので, カラー図はオンライン文献 (Fujiwara et al., 2009) を見よ]

IV. 議論

前節の図 8 と図 9 では, 信用ネットワークの固有値と対応する固有ベクトルを用いて, その構造と変化に関する結果を得た. 銀行の脆弱性とその変化はネットワーク構造だけの解析によるものであるから, 銀行や企業のノードの属性としての財務情報はまったく用いていないことに注意する. したがって, 得られた解析結果の有用性をより深く検証するためには, 実際に生じた個々の財務状況の悪化やデフォルトなどと比較していく必要がある. ここではそこまでは踏み込まずに, 過去 25 年間の金融システムとその変化と, 得られた結果を比較検討することにとどめて議論する.

図 9 にある固有ベクトルの成分の絶対値のプロファイルは, 1980 年から 1986 年までと 2000 年から 2005 年までの期間には比較的安定している. 前者の時期のプロファイルのピークは, 少数の地方銀行 (中部北陸地方) に対応している. 80 年代後半には, そのプロファイルは大きく変化して, 1986 年から 1989 年の間には, それらは北陸地方にあってその期間に財務状況が急速に悪化したことが知られている, 特定の二つの地方銀行に極めて大きなピークをもったことが分かる. よく知られているように, 80 年代後半から 90 年代にかけて, 特に 1990 年に中央銀行は金融政策を引き締めの方角に転回した. バブル崩壊以降, 90 年代にはプロファイル全体が大きく変化した. この時期に存在する, 銀行分類 h に対応するピークは信金系の金融機関に集中している. そして 90 年代後半には, プロファイルは以前のものと類似な形に戻ったが, 他の地方銀行 (特に第二地方銀行) に

ピークを持つことになった．その後の 2003 年から 2005 年にかけてのピークは沖縄地方の 3 銀行に集中している．

本節の冒頭に述べたように，単なる記述的な比較を超えた解析は必要ではあるが，実はこれらの各年のピークの多くは破綻した銀行や，実質的な破綻を起こして他のより大きな銀行などに合併されていたことが分かった．

また，上に述べた固有ベクトルのプロファイルのピークは，中部北陸地方や沖縄地方のように，同じ地方にクラスターとして存在することに注意する．文献 (De Masi et al., 2008) では，重みなし 2 部グラフの解析により銀行の貸出パターンには地域に固有のクラスター構造を持っていることが分かっている．実際，銀行 μ の貸出先パターンを，行列 A の列ベクトルを用いて

$$(\mathbf{a}_\mu)_i := A_{\mu i}, \quad (19)$$

のように定義して，銀行 μ と銀行 ν の貸出パターンの類似性を計算することができる．例えばそれぞれに対応するベクトル \mathbf{a}_μ と \mathbf{a}_ν の内積で定めて，多次元尺法や階層的クラスター解析など標準的な多変量解析により，クラスタリングを行うことができる．De Masi et al. (2008) では，重みの情報を考慮せず，銀行と企業間の関係性の有無だけに基いて類似性を計算して，最小木 (minimum spanning tree; MST) を構成した．その結果得られた MST を調べると，特に地方銀行を中心に同じ地域の企業に貸し出しを行い，かつそのパターンがよく似ている複数の群が抽出できた．このクラスター構造が上で述べた固有値の構造とどのように関係しているかを調べることは今後の課題である．

もう一つの課題は，II 節で述べたように，解析には破綻した企業を含めていない．このような倒産企業を含めて解析したり，あるいは破綻の影響を実際に追及して，固有値問題の解と比較するなどは興味ある問題であると考えられる．

V. まとめ

1980 年から 2005 年の 25 年間にわたる日本国内の民間金融機関と上場企業間の信用ネットワークの構造とその変化を解析した．各年の時点で，ノードを銀行と企業のいずれか，リンクを銀行からの貸出すなわち企業からの借入の有無に応じて対応するノード間に接続するような 2 部グラフとみなし，そのネットワーク構造を解析した．これは，各リンクには貸出額すなわち借入額という重みが付与されているような，重み付き 2 部グラフである．

銀行が借入額を縮小させたとき，債務者としての企業は，その重みによって計算できる量に比例する一定の影響を受ける．同様に，企業が破綻したとき，債権者としての銀行は，その重みに応じて決まる量に比例した一定の影響を受ける．一方の主体から他方への，またその逆の影響の伝播を定量的に評価するために脆弱性とよぶところのスコアを導入した．その脆弱性スコアは，2 部グラフの構造とリンクの重みから計算できる，ある固有値問題を解くことにより計算できる．

実際のデータから計算された固有値と固有ベクトルの構造と、元の2部グラフをランダム化したランダムグラフの構造とをモンテカルロ計算により比較して、自明でない最大の固有値の数個と対応する固有ベクトルが有意に意味があることを示した。これを25年間の信用ネットワークに適用して、固有値構造が比較的安定していた時期と不安定であった時期が存在すること、特定の地方銀行を含む少数の銀行に脆弱性スコアが集中していることを示した。また、80年代後半のバブルや金融危機を含む時期に固有値構造に大きな変化が見られることが分かった。得られた解析結果の有用性をより深く検証するためには、実際に生じた個々の財務状況の悪化やデフォルトなどと比較していく必要があるが、ここで新しく提案した指標は、金融システムの全体及び特定の部分に関する脆弱性の指標として有用であり、信用ネットワークの構造とその変化の解析に役立つと考える。

謝辞

共同研究 (Fujiwara et al., 2009) を行っていたいただいた、青山 秀明、家富 洋、池田 裕一、相馬 亘の各氏に感謝します。また、共同研究 (De Masi et al., 2008) と本論文の予備的な議論を行っていたいただいた、Mauro Gallegati, Giulia De Masi 各氏にも感謝します。日経メディアマーケティング(株)には技術的な対応をいただきました。

なお、本研究は統計数理研究所共同研究集会「経済物理学とその周辺」(課題番号: 5004)において、平成21年度第1回研究会(2009年9月8日・9日、京都大学基礎物理学研究所「経済物理2009」との共催)で発表した内容を含みます。ここに同研究所共同研究集会の支援に感謝いたします。

Appendix A. 固有値問題の数学的性質

III.B 節に示したように、銀行の脆弱性スコア x は、式 (9) のように行列 P の右固有ベクトルであり、それに双対なスコアは式 (12) のように行列 P の左固有ベクトルである。ここでは、これら固有値問題の数学的な性質を証明する⁶。

まず、「双対」スコア u はスコア x から直接計算できることを示す。そのために式 (9) を成分で書くと

$$\frac{1}{w_\mu} \sum_{i,\nu} \frac{1}{w_i} w_{\mu i} w_{\nu i} x_\nu = \lambda x_\mu, \quad (\text{A.1})$$

を得るが、これは

$$\sum_{i,\nu} \frac{1}{w_i} w_{\mu i} w_{\nu i} x_\nu = \lambda w_\mu x_\mu. \quad (\text{A.2})$$

と書き直すことができる。一方、式 (12) は

$$\sum_\mu u_\mu \frac{1}{w_\mu} \sum_i \frac{1}{w_i} w_{\mu i} w_{\nu i} = \lambda u_\nu, \quad (\text{A.3})$$

であり、添字を $\mu \leftrightarrow \nu$ のように置き換えて

$$\sum_{i,\nu} \frac{1}{w_i} w_{\mu i} w_{\nu i} \frac{u_\nu}{w_\nu} = \lambda u_\mu. \quad (\text{A.4})$$

を得る。式 (A.2) と式 (A.4) を比較すると

$$u_\mu \propto w_\mu x_\mu. \quad (\text{A.5})$$

と同定すれば、それらは等価であることが分かる。

また、このことから左固有値と右固有値はまったく同じスペクトルを持っていることが分かる。

いま二組の固有値と対応する固有ベクトルを、 $(\lambda^{(k)}, \mathbf{u}^{(k)}, \mathbf{x}^{(k)})$ と $(\lambda^{(\ell)}, \mathbf{u}^{(\ell)}, \mathbf{x}^{(\ell)})$ のように表すと

$$\mathbf{u}^{(k)\top} \mathbf{P} \mathbf{x}^{(\ell)} = \lambda^{(k)} \mathbf{u}^{(k)\top} \cdot \mathbf{x}^{(\ell)} = \lambda^{(\ell)} \mathbf{u}^{(k)\top} \cdot \mathbf{x}^{(\ell)}. \quad (\text{A.6})$$

を得る。これは

$$0 = (\lambda^{(k)} - \lambda^{(\ell)}) \mathbf{u}^{(k)\top} \cdot \mathbf{x}^{(\ell)} = (\lambda^{(k)} - \lambda^{(\ell)}) \sum_\mu u_\mu^{(k)} x_\mu^{(\ell)}, \quad (\text{A.7})$$

であり、さらに式 (A.5) から

$$0 = (\lambda^{(k)} - \lambda^{(\ell)}) \sum_\mu w_\mu x_\mu^{(k)} x_\mu^{(\ell)}. \quad (\text{A.8})$$

⁶この証明は、共同研究者である青山 秀明 氏 (京都大学理学研究科) によるものである。

であることが分かる．したがって，固有ベクトルは重み w_μ を計量 (metric) として互いに直交している⁷．すなわち

$$\sum_{\mu} w_{\mu} x_{\mu}^{(k)} x_{\mu}^{(\ell)} = \delta_{k\ell} . \quad (\text{A.9})$$

式 (A.9) から正規直交性:

$$\sum_k w_{\mu} x_{\mu}^{(k)} x_{\nu}^{(k)} = \delta_{\mu\nu} . \quad (\text{A.10})$$

が成立する．

この計量による内積の下では，式 (A.2) と x_μ の積を考えるのが自然であるので，これより

$$\lambda = \frac{\sum_i \frac{1}{w_i} \left(\sum_{\mu} w_{\mu i} x_{\mu} \right)^2}{\sum_{\mu} w_{\mu} x_{\mu}^2} . \quad (\text{A.11})$$

となるから，行列 \mathbf{P} は対称ではないにも関わらず， λ は実かつ正であることが証明された．さらに，任意の数 q に対して，不等式

$$0 \leq \sum_{\mu} w_{\mu i} (q - x_{\mu})^2 = w_i q^2 - 2 \left(\sum_{\mu} w_{\mu i} x_{\mu} \right) q + \sum_{\mu} w_{\mu i} x_{\mu}^2 . \quad (\text{A.12})$$

が成立することも分かる．その判別式の条件:

$$\left(\sum_{\mu} w_{\mu i} x_{\mu} \right)^2 - w_i \sum_{\mu} w_{\mu i} x_{\mu}^2 \leq 0 , \quad (\text{A.13})$$

から，最大固有値は 1 であることが示された．すなわち

$$0 < \lambda \leq 1 . \quad (\text{A.14})$$

これが式 (13) であった．式 (A.11) から， $\lambda = 1$ であれば，またそのときに限り， $x_{\mu} = q$ である．実際，式 (4) と式 (6) から， $x_{\mu} = 1$ ($\mu = 1, \dots, n$) は $\lambda = 1$ の固有値に対応する固有ベクトルである．(ただし，2 部グラフは連結であると仮定した; そうでなければ各連結成分ごとに解析を行えばよい⁸)．したがって，式 (14) が証明できた．

さらに，式 (A.10) を式 (A.2) に適用すると，簡単な計算によって次の和の公式が成り立つことが分かる．

$$\sum_k \lambda_k = \sum_{\mu, i} A_{\mu i} B_{i\mu} = \text{tr } \mathbf{P} . \quad (\text{A.15})$$

⁷数学的には， x は共変ベクトル， u は反変ベクトルであって，それらを計量 $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} w_{\mu}$ が変換していることが言える．固有ベクトルの直交性はこの計量による内積で決定される．

⁸その場合は，各連結成分ごとに x_{μ} が一定の値を持つ．したがって，固有値 $\lambda = 1$ の多重度はちょうど連結成分の数に等しい．

これが式 (15) であった .

以上をまとめると , 固有ベクトル u は x から直ちに計算でき , 同じ情報を持つこと , また固有値は $0 < \lambda \leq 1$ の範囲にあり , 最大固有値に対応する固有ベクトル x は自明な定数ベクトルであることが証明された .

一方 , 最大固有値 $\lambda = 1$ に対応する双対スコア u は , 式 (A.5) により , 貸出総額すなわち $u_\mu \propto w_\mu$ を表すに過ぎない . したがって , 本文では非自明な固有ベクトル , $x^{(2)}, x^{(3)}$ 等だけを調べた .

参考文献

- Caldarelli, G.**, *Scale-Free Networks*, Oxford University Press, 2007.
- De Masi, G. and M. Gallegati**, “Bank-firm topology in Italy,” 2007. submitted.
- , **Y. Fujiwara, M. Gallegati, B. Greenwald, and J. E. Stiglitz**, “An analysis of the Japanese credit network,” 2008. arXiv:0901.2384v1 [q-fin.ST].
- Fujiwara, Y., H. Aoyama, Y. Ikeda, H. Iyetomi, and W. Souma**, “Structure and temporal change of the credit network between banks and large firms in Japan,” *Economics E-Journal*, 2009, 3 (2009-7). <http://www.economics-ejournal.org/economics/journalarticles/2009-7>.
- Imakubo, K. and Y. Soejima**, “Network of fund transaction in call money market,” *Monetary and Economic Studies, Bank of Japan*, 2008, 26. to appear.
- Inaoka, H., H. Takayasu, T. Shimizu, T. Ninomiya, and K. Taniguchi**, “Self-similarity of Banking Network,” *Physica A*, 2004, 339, 621–634.
- Iori, G., G. De Masi, O. Precup, G. Gabbi, and G. Caldarelli**, “A Network Analysis of the Italian Overnight Money Market,” 2007. to appear in *Journal of Economic Dynamics and Control*.
- Kano, M., H. Uchida, G. F. Udell, and W. Watanabe**, “Information Verifiability, Bank Organization, Bank Competition and Bank-Borrower Relationships,” 2006. RIETI discussion paper 06-E-003, the Research Institute of Economy, Trade and Industry.
- Ogawa, K., E. Sterken, and I. Tokutsu**, “Why do Japanese firms prefer multiple bank relationship? Some evidence from firm-level data,” *Economic Systems*, 2007, 31 (1), 49–70.
- Stiglitz, J. E. and B. Greenwald**, *Towards a New Paradigm in Monetary Economics*, Cambridge University Press, 2003.
- Uchida, H., G. F. Udell, and W. Watanabe**, “Bank Size and Lending Relationships in Japan,” *Journal of the Japanese and International Economies*, 2008, 22, 242–267.