

# 多様性の科学に対する 統計物理学のアプローチ

名古屋大学  
大学院情報学研究科  
複雑系科学専攻  
時田恵一郎

# 統計物理学「スピンオフ系」

金子邦彦(東大)



同期



家富洋(新潟大)

弟子



時田恵一郎(名大)



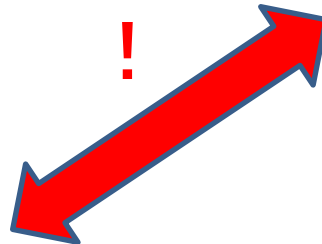
同期



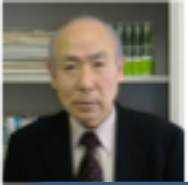
弟子



鶴田健二(岡山大)



Yoshiki Kuramoto



# Acknowledgements



Tsuyoshi Chawanya  
(Osaka University)



Yoshiyuki Kabashima  
(Tokyo Institute of Technology)

Tobias Galla  
(U. Manchester)



David  
Sherrington

Yoshimi Yoshino  
(Osaka U)



Yoji  
Aizawa



Tomoyuki Obuchi  
(Tokyo Institute of Technology)

Hidetoshi  
Nishimori



# 名古屋大学 情報学部 / 大学院情報学研究科

情報学部ページで情報学部広報動画を公開中です。

## News 新着情報

一覧

- 2017.12.06 **受賞情報** IEEE MHS2017 Best Paper Award in 2017 (複雑系科学専攻 大岡昌博教授)
- 2017.11.24 **イベント** 情報学研究科共催「2017年度 情報処理学会 東海支部 講演会」が開催されました
- 2017.11.17 **受賞情報** TOPPERSプロジェクト 第7回 TOPPERS活用アイデア・アプリケーション開発コンテスト アプリケーション開発部門 銅賞 (情報システム学専攻 枝廣正人教授 本田晋也准教授 組込みシステム研究センター中本幸一特任教授)
- 2017.11.17 **受賞情報** 日本機械学会創立120周年記念功労表彰 (複雑系科学専攻 大岡昌博教授)

## 重要 重要なお知らせ

一覧

- 2017.11.16 **教員公募** 准教授 (情報システム学専攻ソフトウェア論講座) を公募します。(応募締切 2018年1月26日)
- 2017.10.12 **教員公募** 教授、准教授、または講師 (数理情報学専攻 数理情報モラル論学講座) を公募します。(応募締切 2018年1月12日)
- 2017.10.11 **教員公募** 准教授 (情報システム学専攻情報プラットフォーム論学講座) を公募します。(応募締切 2017年12月22日)
- 2017.08.10 **大学院** 平成30年度情報学研究科博士前期課程学生 入試及び平成29年度情報学研究科博士後期課程10日入試の合格者について



イベント・セミナー

受賞情報

メディア報道

教員公募

採用担当の方へ

受験希望・高校生・高校教員の方へ

教職員向け関連情報 (学内のみ)

お問い合わせ・アクセス

# ピーター・ターチン

## コネチカット大進化生態学部



# エドワード・ルトワック 戦略国際問題研究所



# 学生の研究

- 修士論文

- 長瀬久在, 「空間明示型中立モデルによる大陸島嶼生態系の種多様性パターン」
- 日當泰輔, 「TAP平均場アルゴリズムを用いた協調フィルタリング型制限ボルツマンマシン学習」
- 増田愛, 「自己免疫疾患の分子擬態モデル」

- 卒業論文

- 安倍悠斗, 「コンピュータ将棋の変遷と功績」
- 杉森真樹, 「機械学習によるソーシャルボットの検出」
- 北川健太, 「ニューラルネットワークを用いた自動採譜システムの構築と有効性の検証」
- 宮田佳奈, 「アメリカ大統領選挙の解析とVoterモデルのシミュレーション」
- 荒井貴光, 「2部グラフ構造を持つ連想記憶モデルによる並列想起」

# Fireflies' synchronization



K. Tokita. Aioi-yama, Nagoya. May 27, 2016.

Canon EOS Kiss DN, EF50mmF1.8 STM, ISO800/F2.5/WB:auto, SS60", 25:45PM-26:35PM.

53 pictures' composite.



# 多様性

- **自然科学**における多様性概念
  - 生物多様性、種多様性、遺伝的多様性
  - 「壊すのはたやすく、作るのは困難」
    - 生態系サービス (cf. ミツバチの送粉、有用遺伝子)
    - 免疫学: 感染症とウィルスの進化的多様性
    - 農学: 土壌微生物の多様性と連作障害
- **社会科学・人文学**における多様性概念
  - 個人、民族、価値観、組織、文化、地域、社会の多様性
  - ダイバーシティ・マネジメントとイノベーション
  - ポートフォリオ

# 多様性の科学

- 統計力学(たくさんあるものの平均的な振舞について)
  - 主体(原子, 分子)は**1種**
  - 相互作用も**一様**
- スピングラス(合金), 神経回路網
  - 主体(スピン(Fe, Au), ニューロン)は**少数種**
  - 相互作用(RKKY, シナプス結合)は**多様**
- タンパク質
  - 主体(アミノ酸)は**やや多様(～20種類)**
  - 相互作用(ファンデルワールス力, 疎水性相互作用, 水素結合, イオン結合...)は**多様**
- 生物ネットワーク
  - 主体(代謝物質, タンパク質, 細胞, 個体...)は**多様**
  - 相互作用(反応係数, タンパク質間相互作用, 種間相互作用)も**多様**
- 社会・経済ネットワーク
  - 主体(ヒト, モノ、、、)が**非常に多様**
  - 相互作用(人間関係、モノとモノの関係、、、)も**非常に多様**
  - **主体や相互作用の変化(進化)も非常に速い**

本質的に非線形・非平衡系なので、数理、物理の方法論も一緒に作りながら研究を進める必要があり、逆に数理、物理にも貢献する可能性がある。

# 生物多樣性

# 生物多様性に関する問い

- なぜ地球上にはたくさんの生物がいるのか？  
(～ 数千万種、数億種； 熱帯に半数以上が集中している)
- 生物多様性が失われると何が起こるのか？

(有史以降の絶滅規模は中生代末期の大絶滅に匹敵；  
気候変動防止枠組み条約、生物多様性条約 1992年)

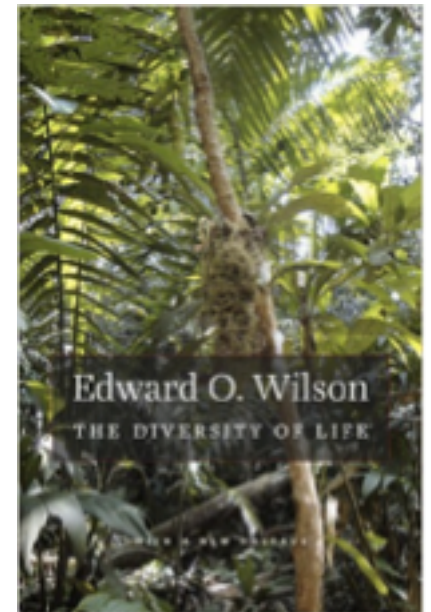
- 生物多様性が失われる直接の原因は何か？  
(キーストーン種の絶滅と連鎖反応？)
- 生物多様性を人為的に保全、回復する方法があるか？

(キーストーン種の発見？)

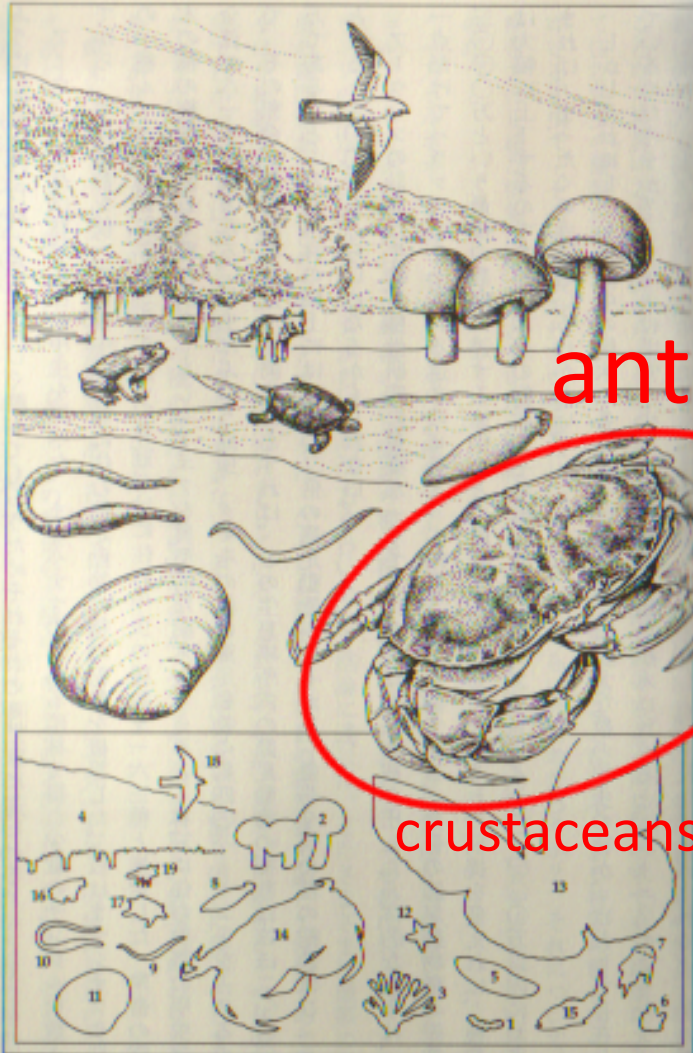
# E. O. Wilson



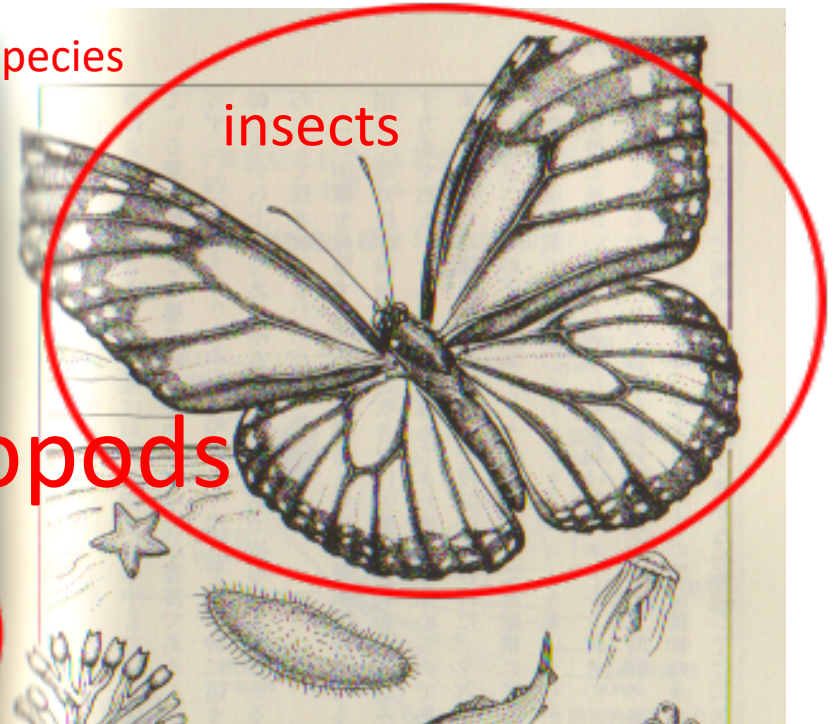
E.O. Wilson, 1995,  
The Diversity of Life



Size ~ Number of species



crustaceans



insects

arthropods

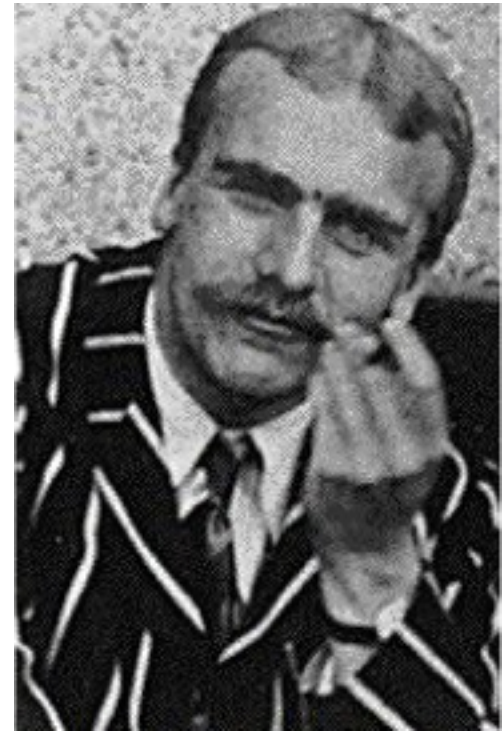
300,000 beetles!

種の眺望、各グループの代表的生物の  
ている種数にはほぼ比例するように描い  
記の通りだが、ウイルスや無脊椎動物  
1. モネラ(バクテリア、シアノバクテリア)  
3. 藻類 26,900 4. 高等植物 248,400  
節動物 5,000 7. 刺胞動物およびイ  
クラゲその他の近縁) 9,000 8. 環形  
9. 線形動物(線虫) 12,000 10. 環形  
11. 軟体動物 50,000 12. 棘皮動物(海  
虫類 751,000 14. 昆虫以外の節足動  
15. 魚類および下等脊椎動物 18,800  
6,300 18. 鳥類 9,000 19. 哺乳動物



# J.B.S.Haldane

- 1892-1964
- Physiology, genetics, evolutionary biology, mathematics, statistics, biostatistics
- One of the inventors of the word “clone”.
- When a priest asked him what is a message which God wants to send to us, he answered...





# Robert May

- 英王立協会会長(2000-2005)
- 生態系モデルにおける安定性と複雑さ
- ロジスティックカオスの発見
- 感染症、ウィルス、免疫系のダイナミクス
- 種の多様性と変化
  - 種多様性(3M~100M)
  - 絶滅速度
    - (種の平均寿命~1My、現在100倍以上)
- 生物多様性はなぜ重要なのか
  - **狭義に実利的な主張**
    - 薬局の棚の薬の25%はわずか120種の植物から作られたもの
    - 土着の人々は25000種(全植物種の10%)を薬として用いている
  - **広義に実利的な主張**
    - 人間の活動規模の拡大によって気候変動が生じようとしている今、少なくとも生物多様性が地球の生命維持システムを守るうえで果たしている役割を理解するまでは、生物多様性の減少について懸念すべき。
  - **倫理的な主張**
    - 英国政府「地球の乗組員としての私たちの倫理的な義務——それは私たちの地球を守り、将来の世代に良い状態で手渡すことです」

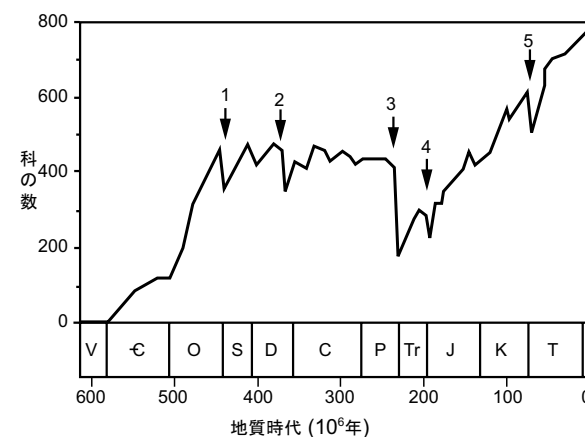
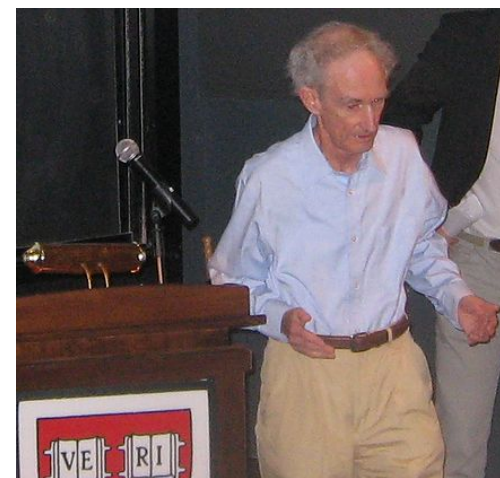
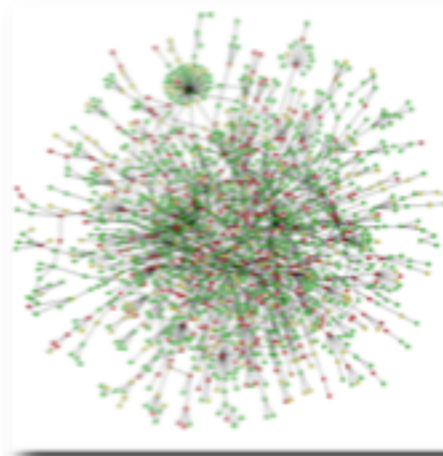


図4 長期間にわたって化石に刻まれた各種海洋動物の科の多様性の歴史。上記の曲線は、77のデータから構成され、各データは、特定の層位において良好な状態の化石が得られた科の総数を示している。5つの矢印は、大量に科が絶滅した時期を示す。時間軸に各地質時代の期間を表す(V: 原生代後期、C: カンブリア紀、O: オルドビス紀、S: シルル紀、D: デボン紀、C: 石炭紀、P: 二畳紀、Tr: 三畳紀、J: ジュラ紀、K: 白亜紀、T: 第三紀)。

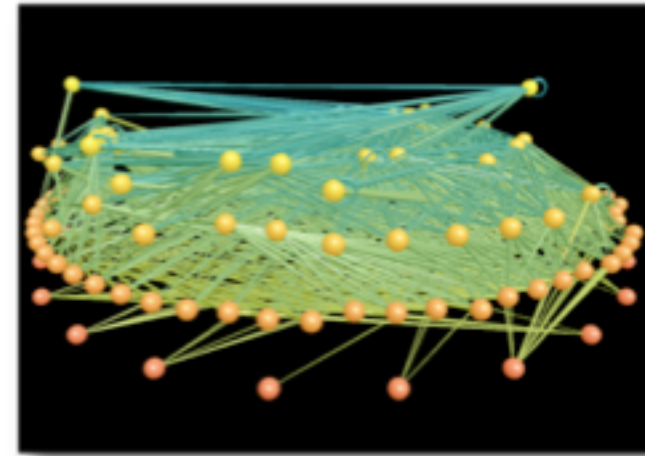
# Dynamics of complex biological networks



Biochemical Pathway



H. Jeong et al,  
Protein networks



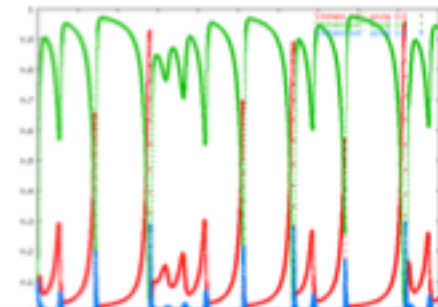
N. Martinez, Food web  
Little Rock Lake

Drug discovery

Environmental conservation  
Sustainability

- Dynamics of large-scale multispecies system and their control.
- Relationships between stability, behavior and patterns and parameters.
- Modern challenge of nonlinear and nonequilibrium physics

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_1(1 - x_1 - x_2 - 10x_3) \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_2(1 - 1.5x_1 - x_2 - x_3) \\ \frac{dx_3}{dt} &= x_3(-1 + 5x_1 + 0.5x_2)\end{aligned}$$



Chaos by a system with only 3 species !

# 多様性の指標

- 物理学、情報科学、計算科学

- エントロピー
- 複雑性 (complexity)

- 生態学

- シンプソンの多様度指数
- 種の豊富さのパターン

$$D = 1 - \sum_{i=1}^S p_i^2$$

- ランク-アバンドンス関係 (cf. Zipfの法則)
- 種個体数分布

- 経済学

- ジニ係数

# Rank-abundance relations

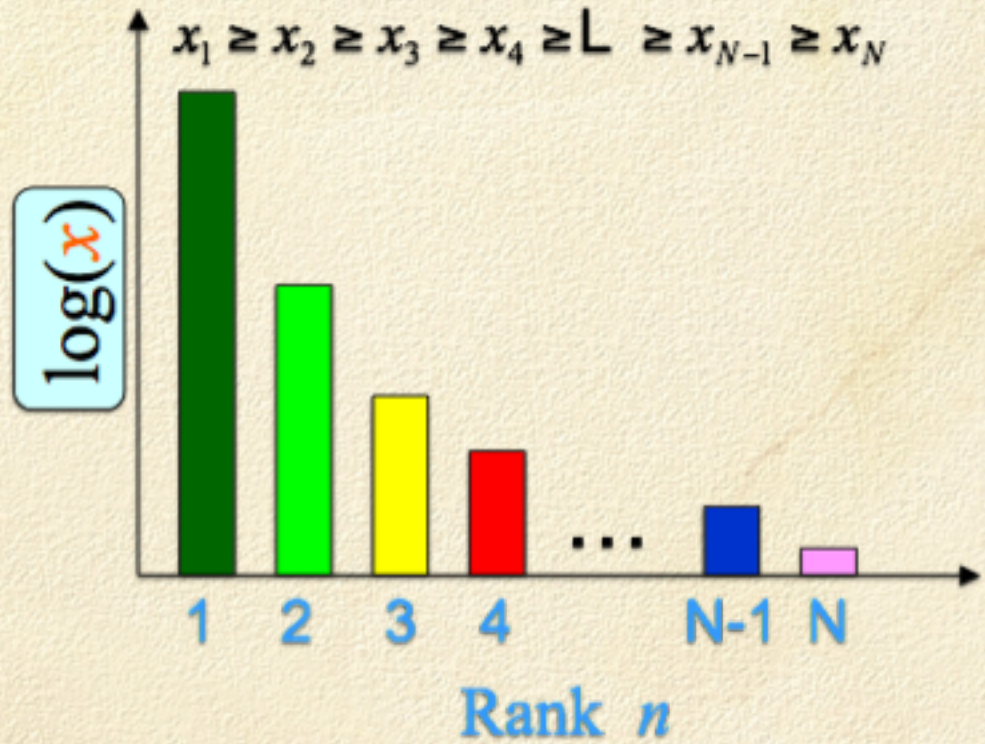
$x(n)$ : population  $x$  of  $n$ -th ranked species

# Motivation

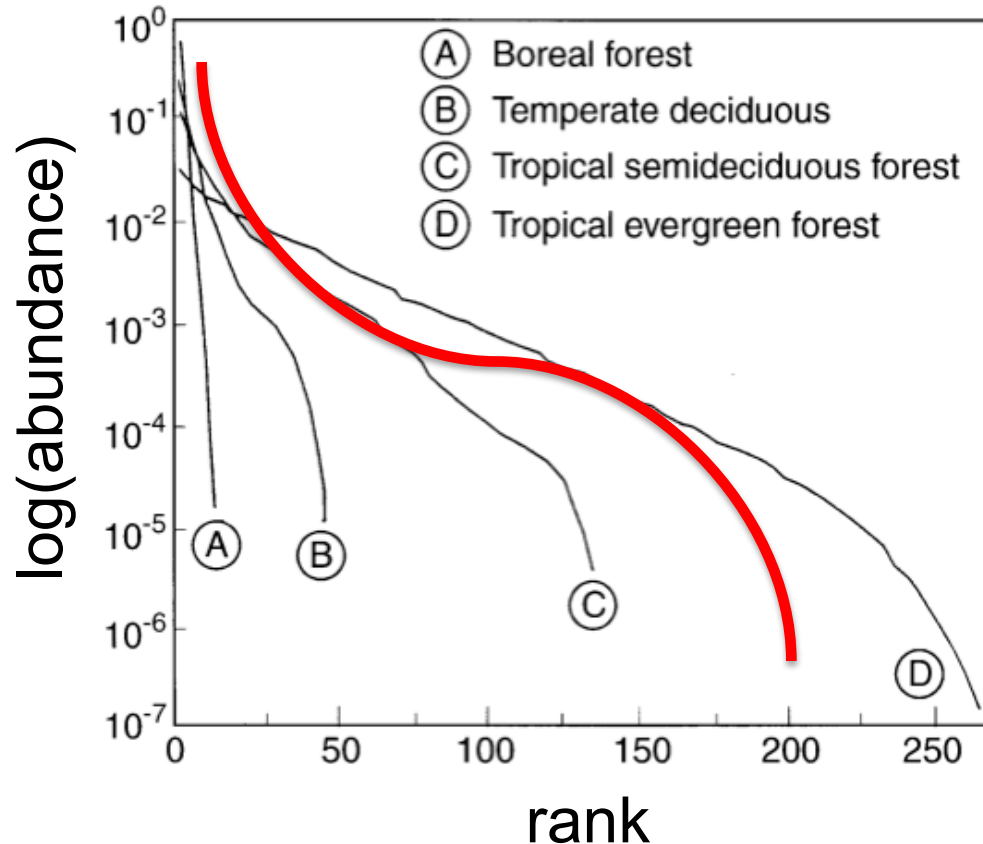


“Rank-abundance relations”

Species	Rank $n$	Abundance $x$
	1	$x_1$
	2	$x_2$
	3	$x_3$
	4	$x_4$
...	...	...
	$N-1$	$x_{N-1}$
	$N$	$x_N$

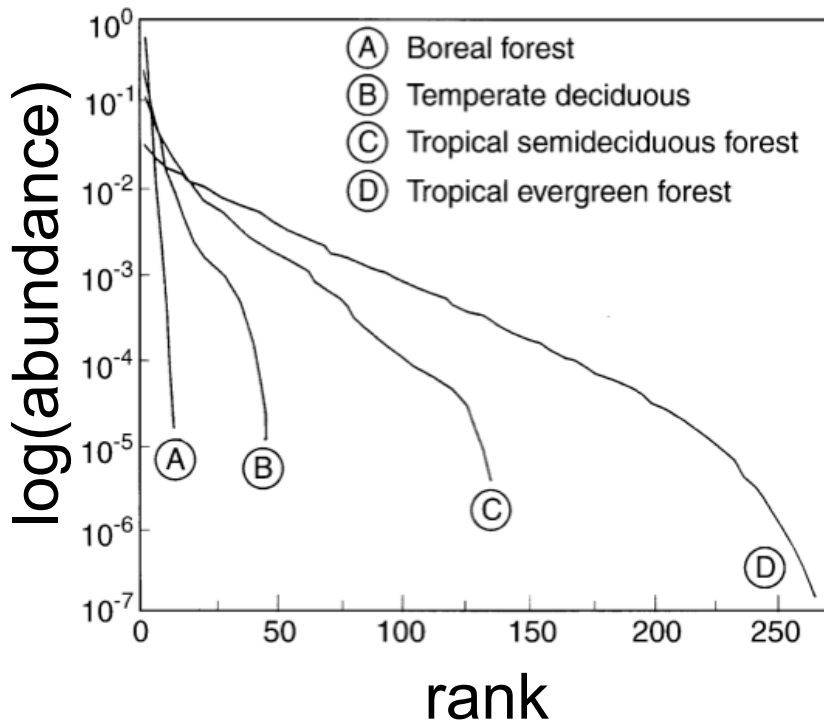


# Rank-abundance relations (RAR)



- Typical sigmoid curves are universally observed.

# Major Question on SAD

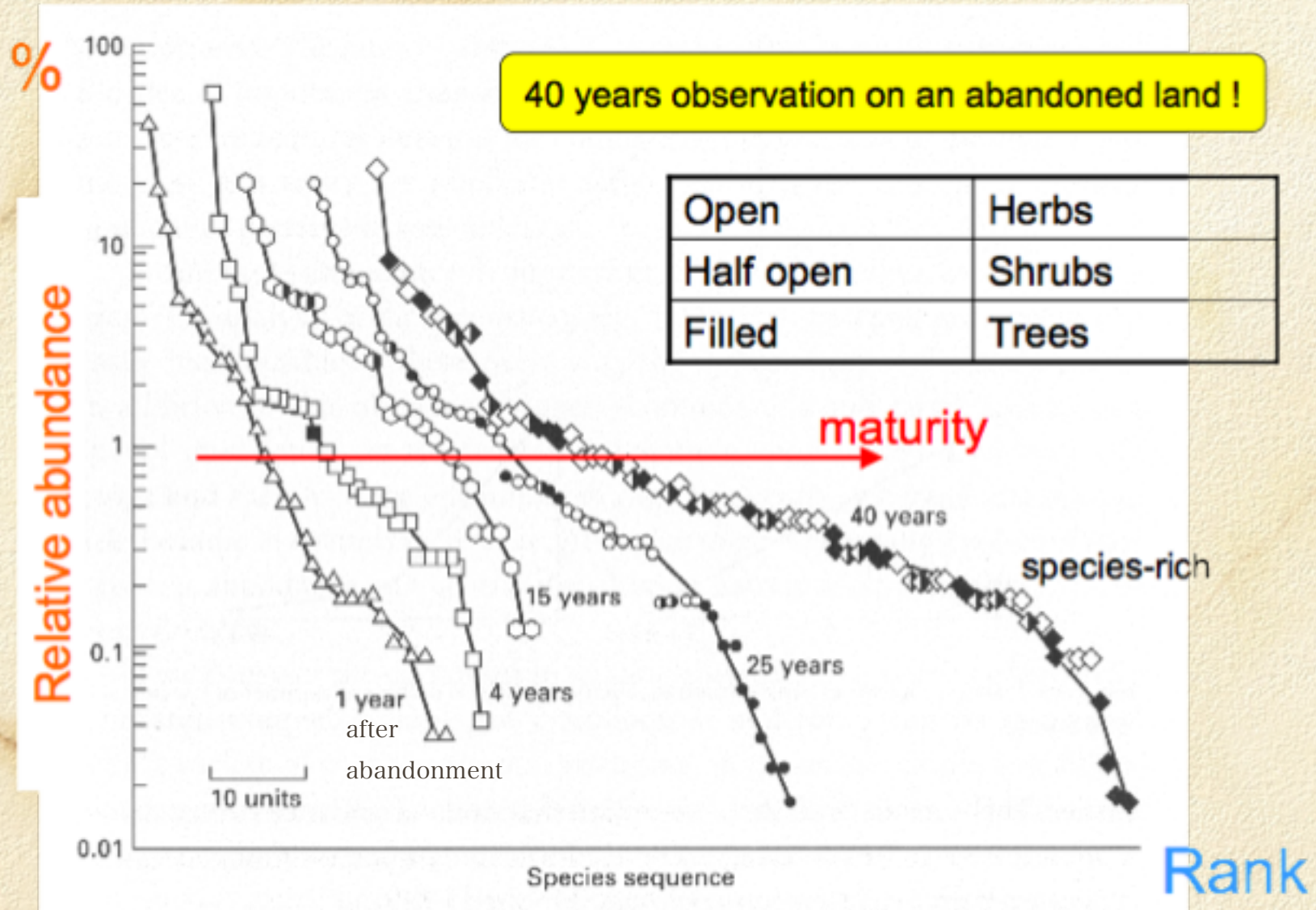


?

- **Environmental parameters** (temperature, latitude, elevation, **pollution**, **stress**...)
- **Species interactions** (competition, predation, mutualism, parasitism, **aliens**...)

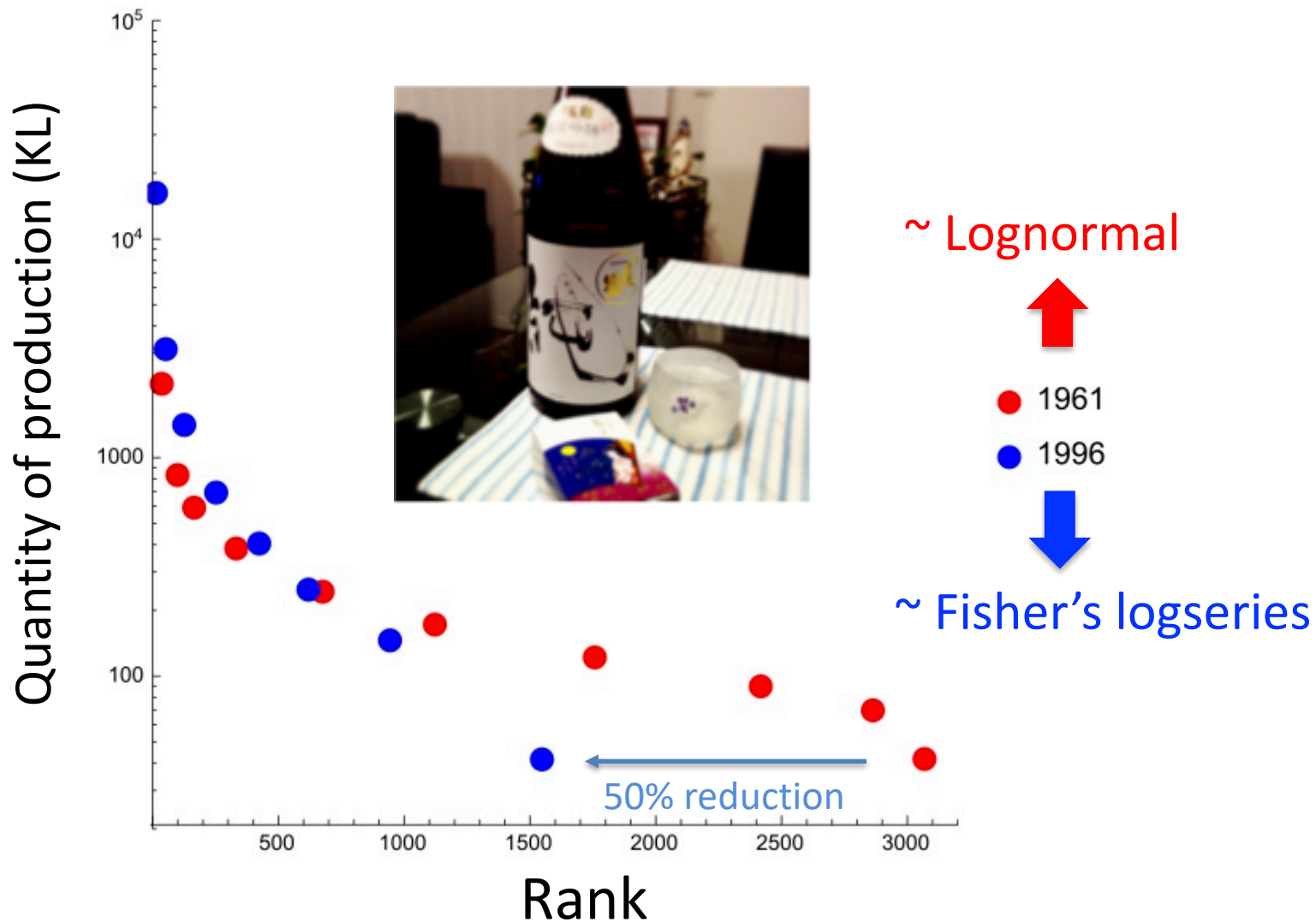
# Secular variation

Bazzaz, 1975





# RAR of Japanese sake brewery and their production



# ワインの国別生産高(2013)

対数型「ランク-アバンダンス関係」

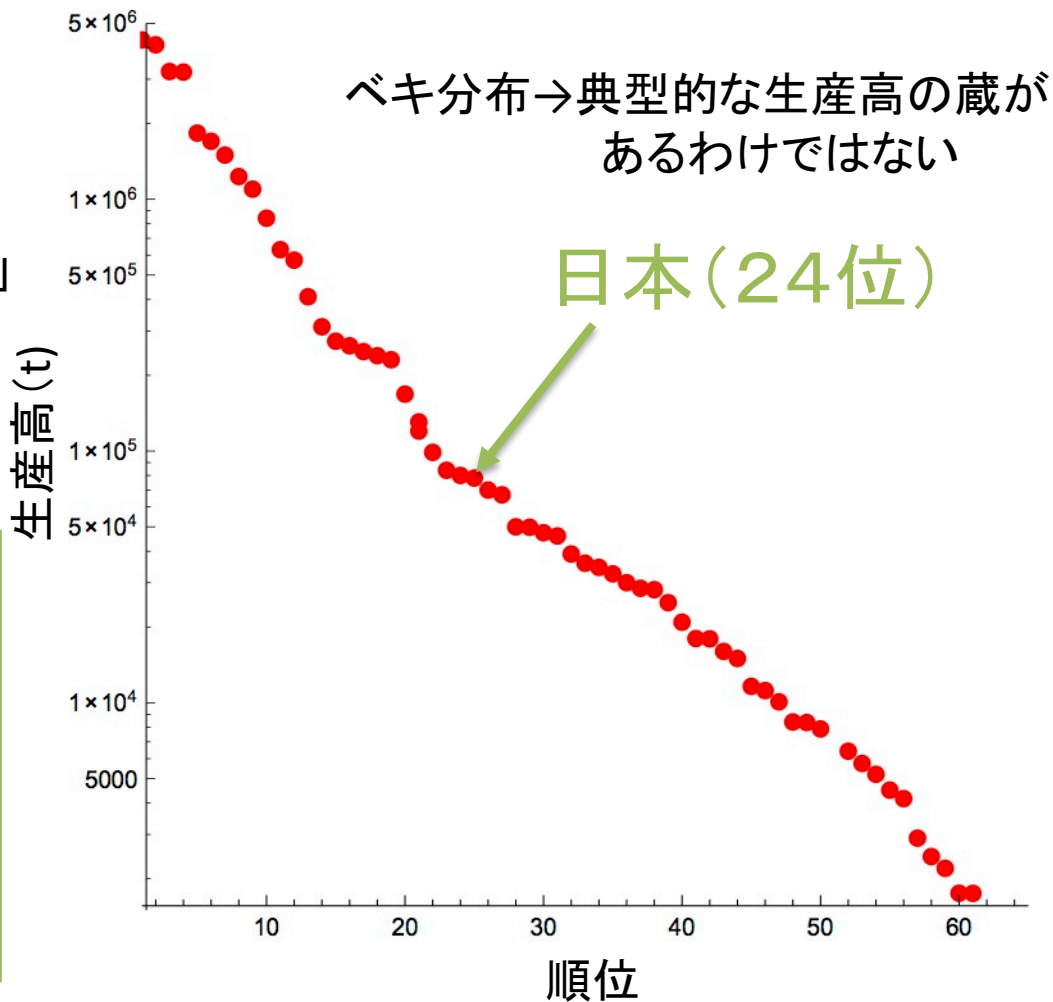


ベキ型種個体数分布

$$\log(p(= \text{product})) = b - a \times r(= \text{rank})$$

$$r = b/a - \log(p)/a$$

$$F(p) \equiv -\frac{dr}{dp} = \frac{1}{a}p^{-1}$$



# ベキ型のランク-アバNdance関係

- Zipfの法則(傾き-1)
  - 姓・名の頻度
  - 干潟の生物種の個体数
  - 単語の出現頻度
  - ウェブページへのアクセス頻度
  - 都市の人口
  - 上位3%の人々の収入
  - 音楽における音符の使用頻度
  - 細胞内の遺伝子の発現量
  - 地震の規模
  - 固体が割れたときの破片の大きさ
- パレート分布

# 干潟の生物群集に見られるZipf則

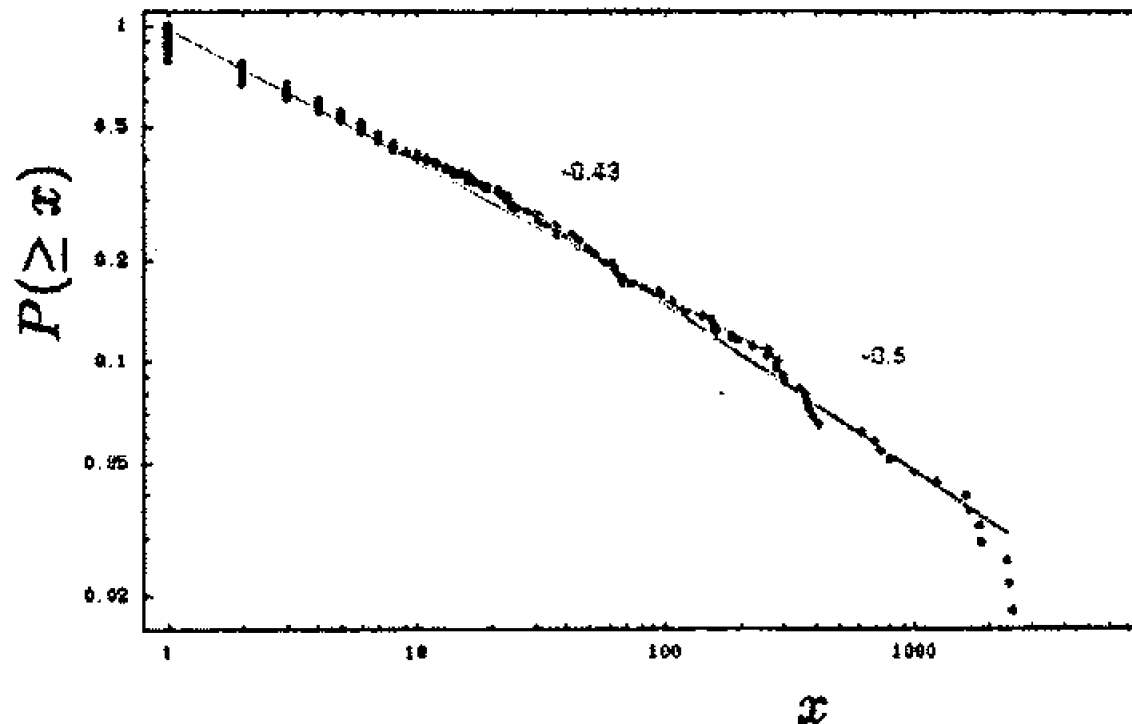


図 1: 調査データから求めたベントスの種個体数分布 (両対数)。横軸は個体数  $x$ , 縦軸は個体数  $x$  より多い種の累積分布  $P(\geq x)$  である。実線は傾き  $-0.43$  と  $-0.5$  の直線である。

# Zipf則とHeaps則

総個体数 $N$ ～面積 $A$

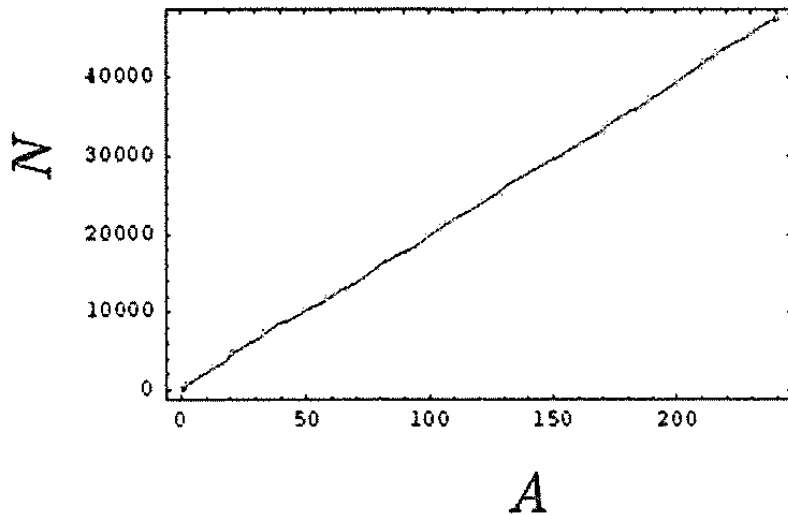


図 2: 調査データから求めた「面積」 $A$  とベントスの総個体数  $N$  の関係

Heaps則、種数 $S$ -面積 $A$ 関係

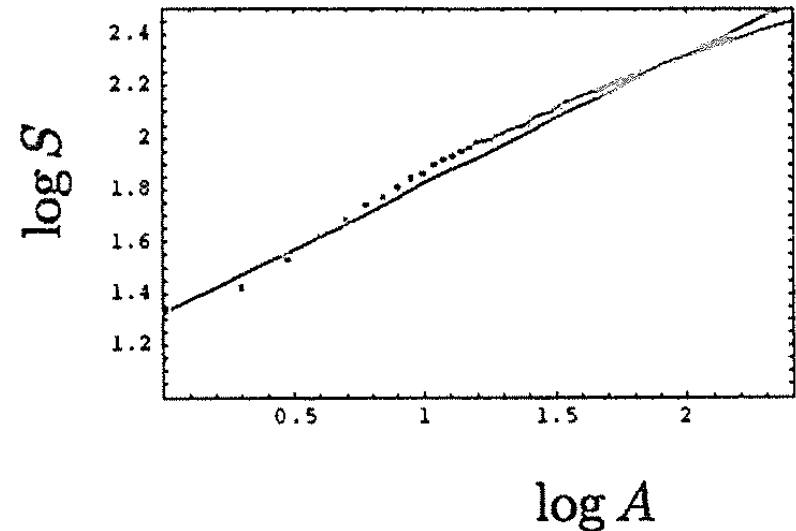


図 3: 調査データから求めたベントスの種数面積関係 (両対数)。横軸は「面積」 $A$  の常用対数, 縦軸は種数  $S$  の常用対数。実線は傾き 0.5 の直線である。

# 単語の出現頻度

## Zipf則

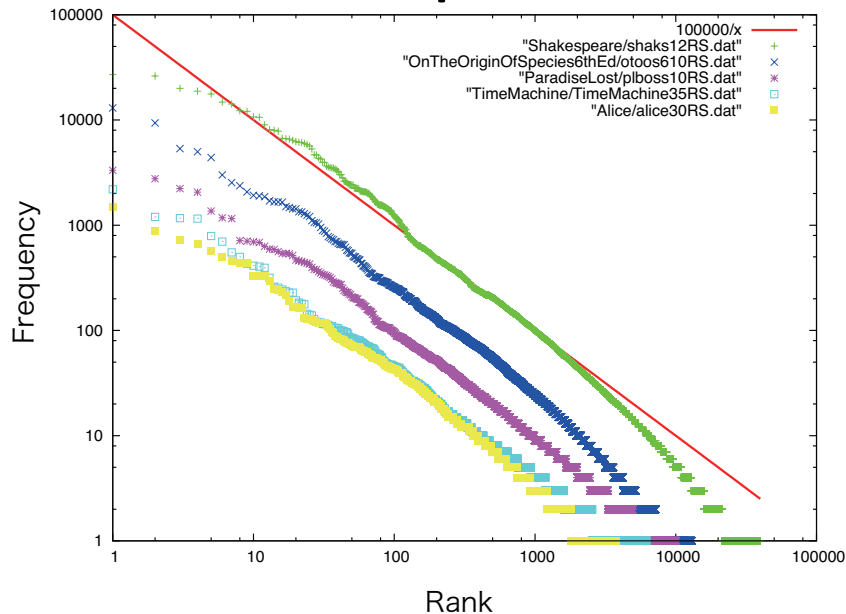


図 2: 書物の単語数に現れる Zipf の法則. 上から, シェークスピア戯曲集, ダーウィン/種の起原第6版, ミルトン/失楽園, ウェルズ/タイムマシン, キャロル/不思議の国のアリス. 直線は  $\alpha = 1$  のフィッティング. 電子書籍データは, Project Gutenberg[9] による.

## Heaps則

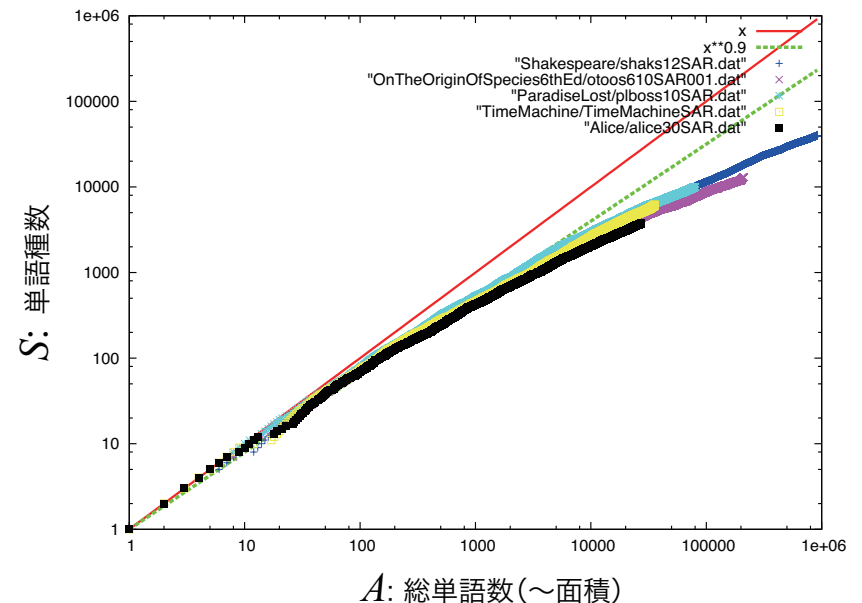
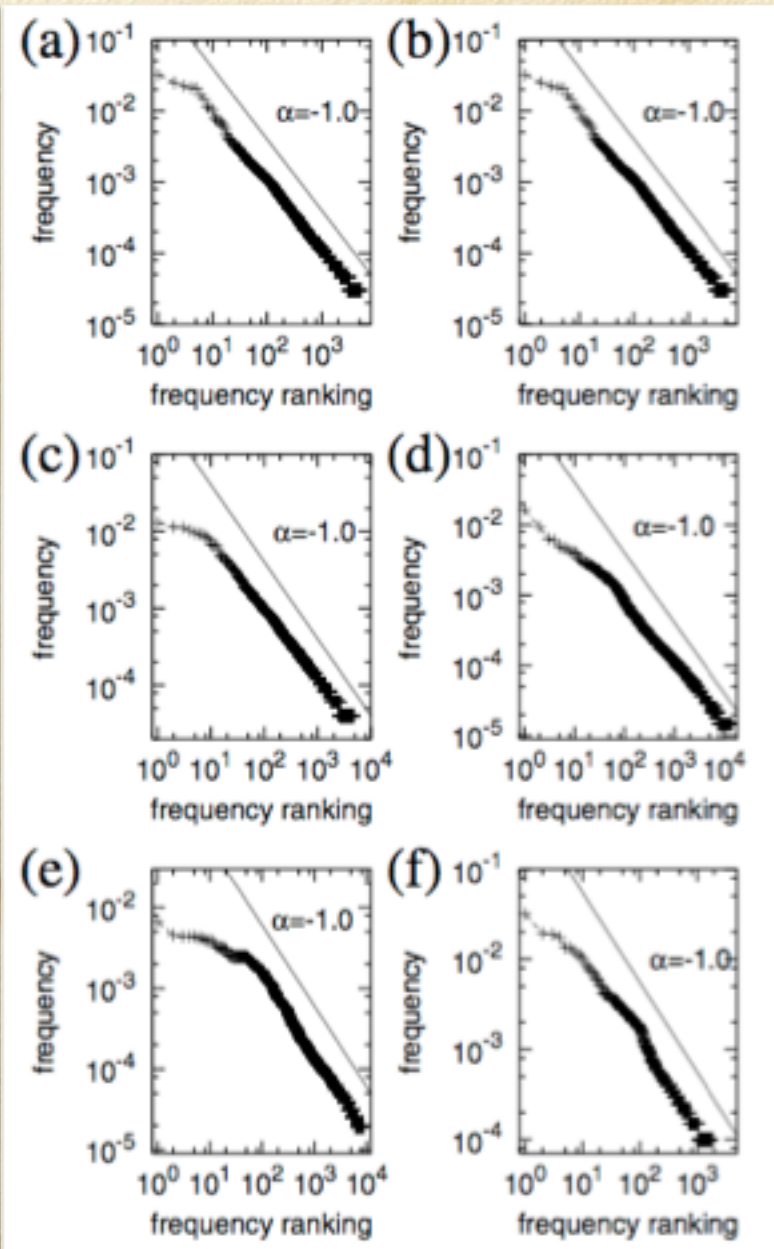


図 3: 書物における, 1 ページ目からの単語数  $A$  と単語種数  $S$  の間に現れる「種数面積関係」. 上の直線は  $\alpha = 1$ , 下は  $\alpha = 0.9$  のフィッティング.

# The Zipf's law in gene expression

Furusawa & Kaneko, 2003



(a) Human liver

(b) Kidney

(c) Human colorectal cancer

(d) Mouse embryonic stem cells

(e) *C. elegans*

(f) Yeast (*S. cerevisiae*)

# Zipf則とHeaps則の関係

- べき分布:  $p(x) \propto x^{-(1+\alpha)}$
- Heaps則(種数面積関係):  $S \propto A^z$
- 冪指数の関係:

$$z = \frac{dy}{d\mu} = \frac{e^{\gamma y} - 1}{(1 + \gamma)e^{\gamma y} - 1}$$

$$y \equiv \ln(S + 1), \quad \mu \equiv \ln A, \quad \gamma \equiv \frac{1 - \alpha}{\alpha}$$

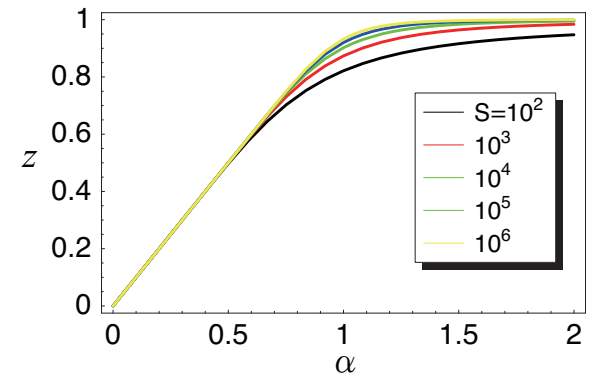
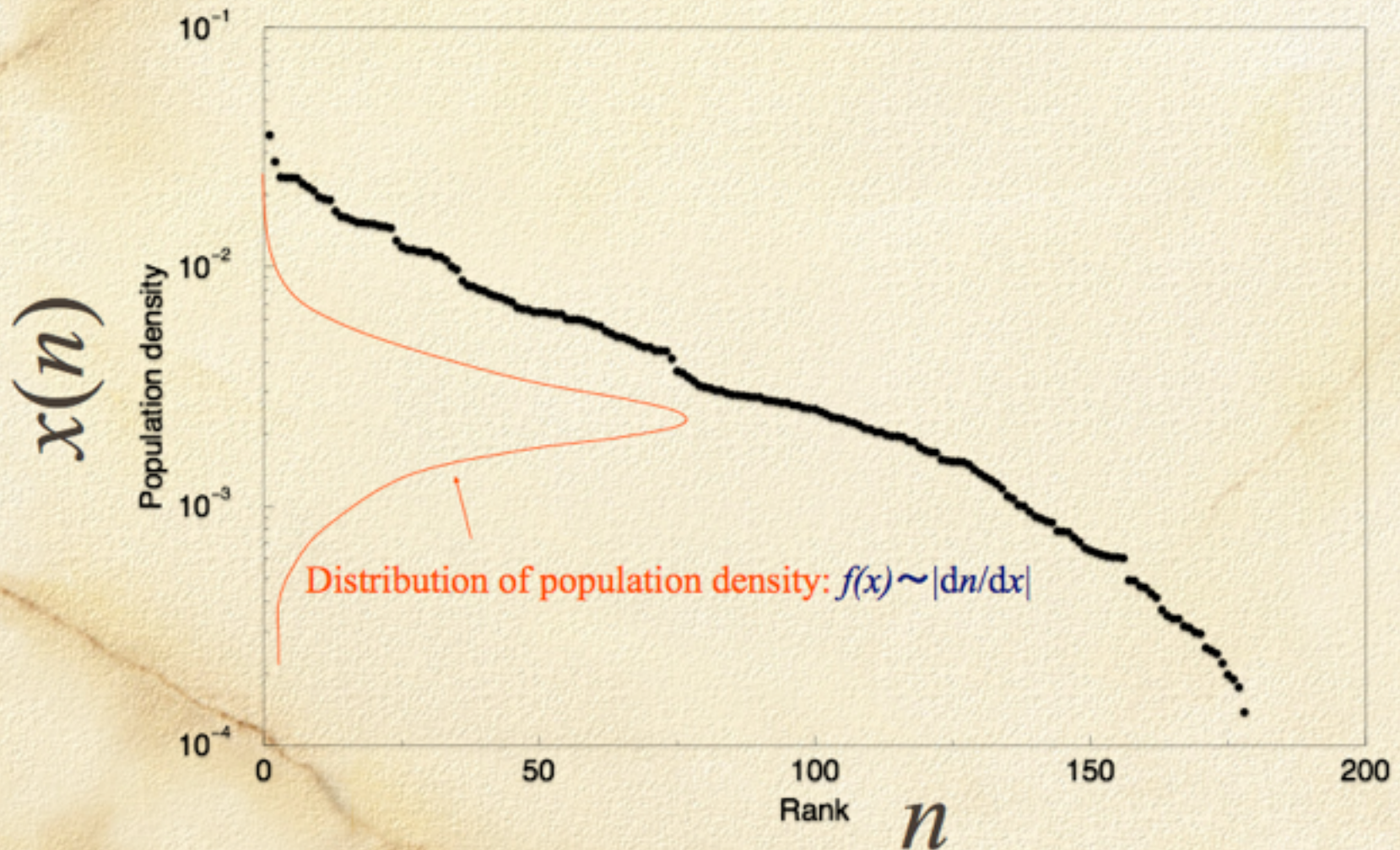


図 1: 種数面積関係のべき指数  $z$  と個体数分布のべき指数  $\alpha$  の関係.



# SAP of evolutionary community assembly model

*Tokita & Yasutomi (2003)*

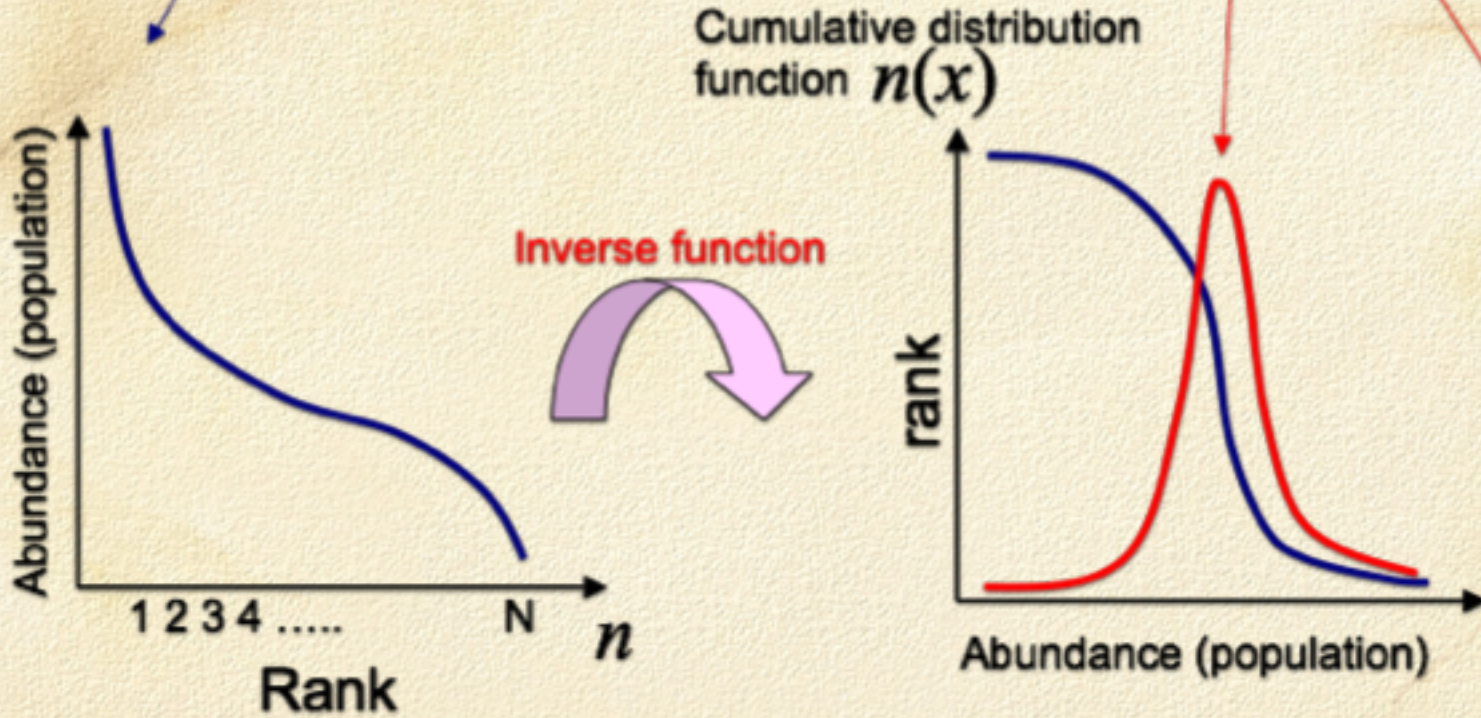


Motivation

RAR

SAD

Rank-abundance relation and population distribution



$$f(x) \sim \left| \frac{dn(x)}{dx} \right| \sim \text{Log-normal distribution}$$

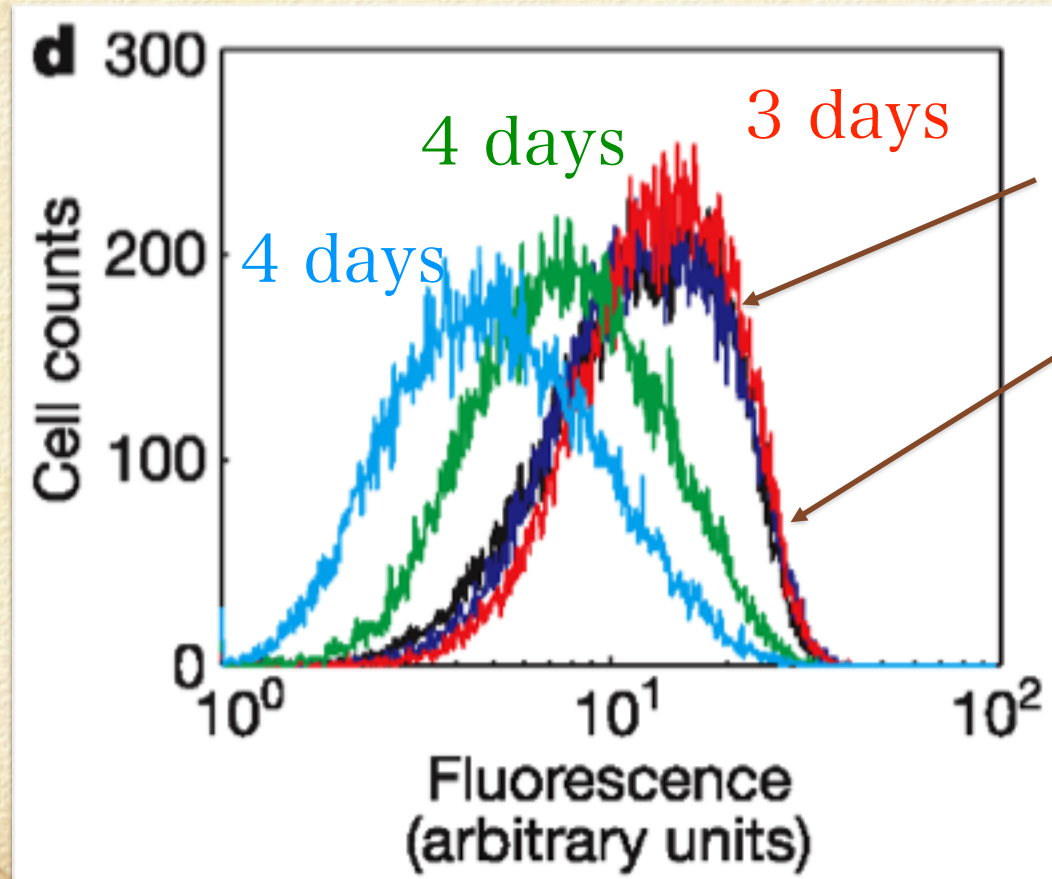
# Species abundance distributions

$P(x)$ : how many species having  
population  $x$ ?

## Molecular biological evidence

Left-skewed lognormal distribution of gene expression

*Blake, et al, Nature 422 (2003)*



2 days

Black: 1 day  
elapse of the  
experiment

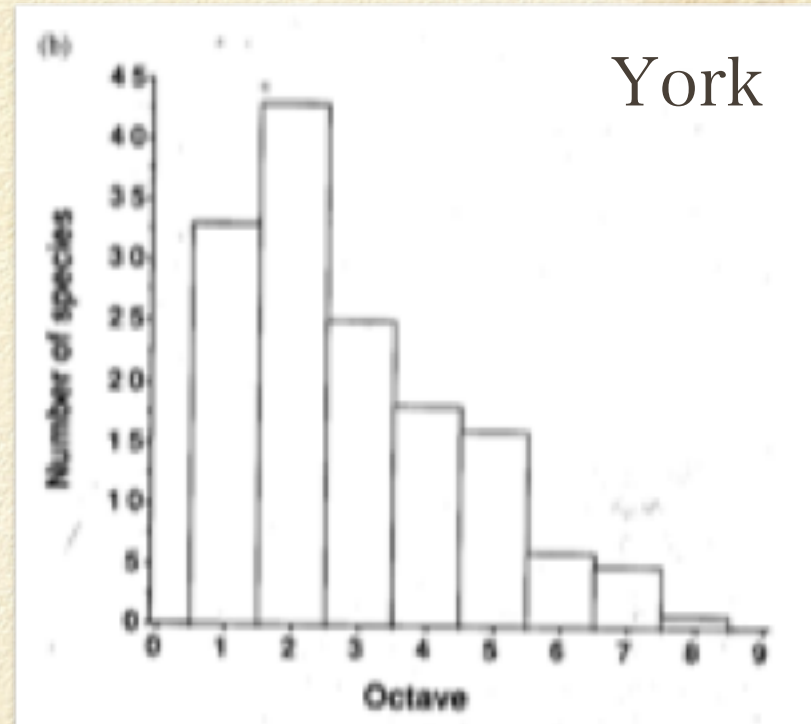
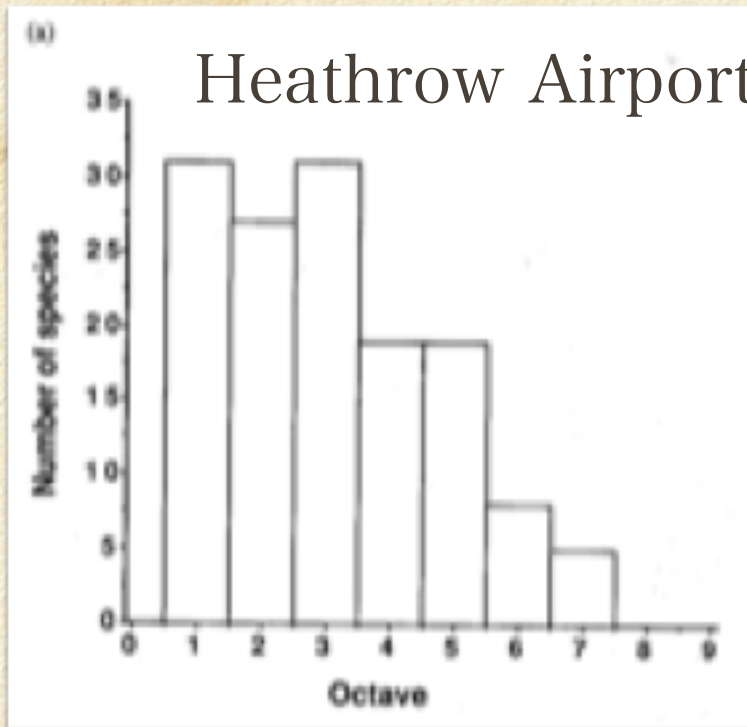
*Saccharomyces cerevisiae*

# Economical evidence

Car-species abundance distributions



*Gaston, Blackburn & Lawton (1993)*



$\log(\text{population of car species})$

Fig. 2. Car species: abundance distribution for samples taken at (a) Heathrow Airport and (b) York. Octave 1 includes all species with sample abundance of 1 individual, octave 2 all species with abundances of 2-3 individuals, octave 3 abundances 4-7, octave 4 abundances 8-15, and so on.

# SAD (species abundance distributions)

- Isao Motomura (1932) : geometric series
- Fisher(1943): logseries
- Preston(1948): lognormal
- Simon(1955): power law (Zipf's law)
- MacArthur(1957): "Broken stick"=exponential
- May(1975): SAD -> SAR(species-area relationships)  $S \propto A^z$
- Hubbell(1979-): "Neutral model"="zero-sum multinomial"
- Diserud & Engen (2000): Dynamic Model
- Tokita(2004), Yoshino, Galla & Tokita(2008), Obuchi, Kabashima & Tokita (2016): Random community model

# Geometric series

動物學雜誌(第四十四卷)第五百二十八號  
Zoological Magazine, vol.44, 1932

昭和七年十月十五日

報 文

## 群聚の統計的取扱に就いて “Statistics for ecological community”

(8月20日受領)

元 村 勳 Isao Motomura

東北帝國大學理學部生物學教室

( 3 Figs. )

I

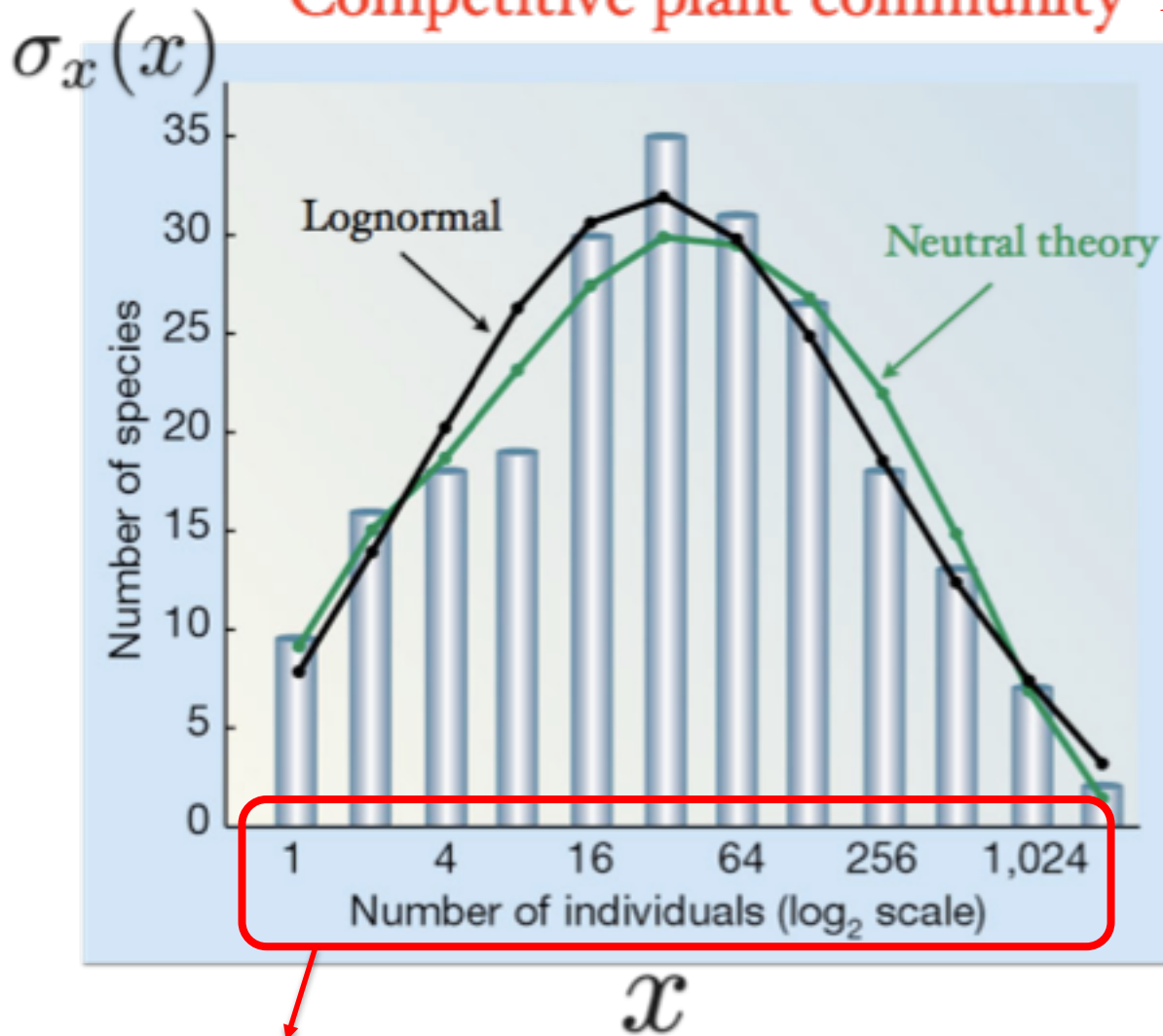
群聚は自然的環境の支配下にあつて種間相互及び外界の條件に對して一定の法則に支配されて居る。故に環境の相違は必然的に生物の生活力に影響を及ぼし各種類の間の平衡に變化を生ずる。即ち所謂地方特有の生物景觀の生ずる所以であらう。此の各地の景觀の特性を比較研究するには先づ生物景觀の要素たる群聚の性質の簡單なる表現法を必要とする。換言すればその中に含まれる種類の間の個體數の關係、即ち群聚の組成が單純であるか複雑であるかをできるだけ簡明に表現することがのぞましい。私は下に於て此の問題に關する私の考案

# Species abundance distribution (SAD)

Competitive plant community in tropical rain forests

Harte 2003  
(reproduced from  
Volkov et al, 2003)

21,457 trees in  
225 species from the  
50-hectare plot on  
Barro Colorado Island

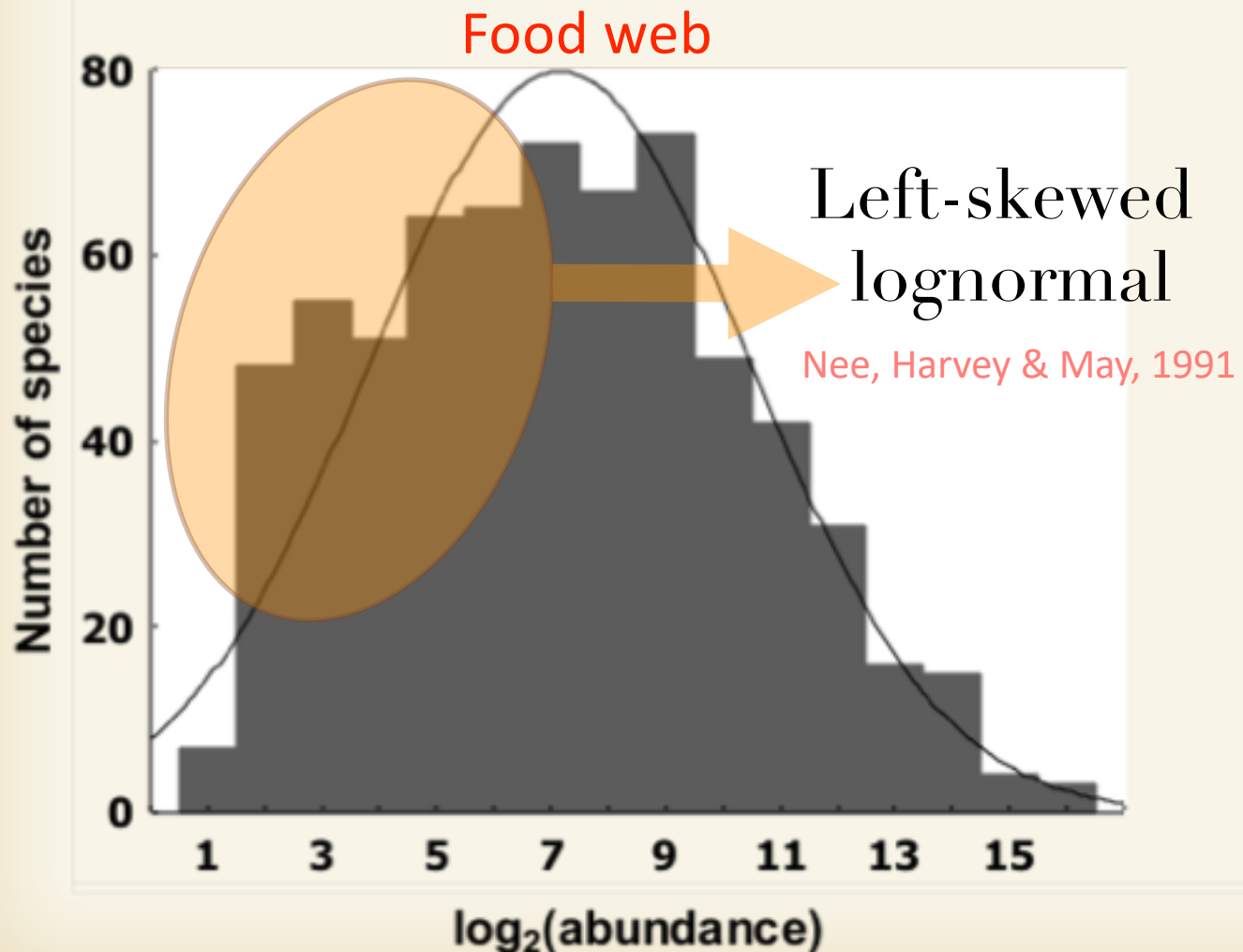


Preston plot



# SAD of 687 invertebrates over 1970 Korean river sites.

Park, et al, 2007



Korea Peninsula  
<http://www.wamis.go.kr/>



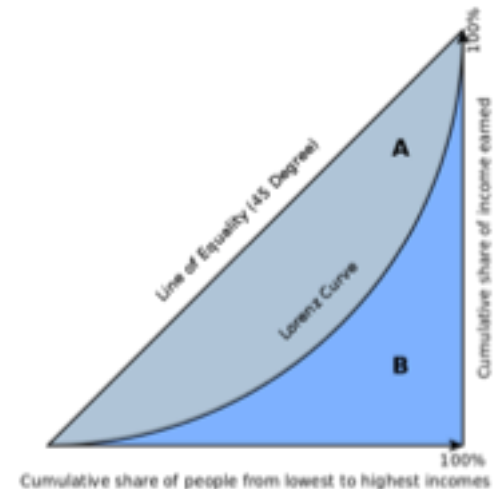
# 種個体数分布とジニ係数

- 種個体数分布:  $f(x)$
- 累積種個体数分布:  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$
- ローレンツ曲線:

$$L(F) = \int_0^F x(F')dF' / \int_0^1 x(F')dF'$$

- ジニ係数:

$$G = 1 - 2 \int_0^1 L(F)dF$$



# パレート分布のジニ係数

- パレート分布:  $f(x) = k \frac{x_m^k}{x^{k+1}} \quad (x > x_m)$

- 累積分布:  $F(x) = 1 - \left(\frac{x_m}{x}\right)^k$

- ローレンツ曲線:

$$L(F) = 1 - (1 - F)^{\frac{k-1}{k}}$$

- ジニ係数:

$$G = \frac{1}{2k - 1}$$

k=1 (Zipf則)のとき  
G=1 !

# 生態系と資本主義社会

- 熱帯雨林、サンゴ礁（高多様性地帯）

- 対数正規分布型の種個体数分布

- 比較的「公平」



- 干潟、北方林（低多様性地帯）、資本主義社会

- ベキ型の種個体数分布

- 「不公平」



# 生態群集の統計物理学

- ミクロな個体群動態からマクロな種個体数分布を導出する。

- 対応する物理学

- 温度ゼロ： 決定論的力学系

- 連続「単体」スピン： 総個体数一定

- 局所場分布の導出：  $f(x)$

$$\sum_i^S x_i = N$$

# Random Community Model

Modern theory: Global analysis

# Replicator Dynamics (RD)

Taylor and Jonker, 1978  
Hofbauer and Sigmund, 1988

population density of species  $i$

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i (f_i - \bar{f}) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (1)$$

$N \rightarrow \infty$  (thermodynamic limit)

Interaction from species  $j$  to  $i$  (time independent random)

$$f_i = \sum_j a_{ij} x_j \quad (i\text{-th species' fitness}) \quad (2)$$

$$\bar{f} = \sum_i f_i x_i \quad (\text{average fitness}) \quad (3)$$

$$\sum_i x_i(t) = 1 \quad (\text{Trajectories are bound in the simplex}) \quad (4)$$

# Replicator Equations

Hofbauer and Sigmund, 1988



- **Lotka-Volterra equations** in **mathematical ecology**

N+1-species RE is equivalent to N-species (generalized) **Lotka-Volterra equations (GLVE)**.

- **Game dynamical equations** in **sociobiology, econophysics** or **game theory**
- Networks of **autocatalytic reaction** and in particular **hypercyclic feedback** in **macromolecular evolution**
- **Continuous selection equation** and a model of **gene conversion** in **population genetics**



# General **asymmetric** random interactions including symmetric and antisymmetric case

Replicator Dynamics (RD)

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i(f_i - \bar{f}) \quad f_i \equiv \sum_j a_{ij}x_j$$

$a_{ii} = -u$  (intraspecific competition) cf.) productivity, maturity or rate (mutualistic/competition)

$\langle a_{ij} \rangle = 0$  (average)

$\langle a_{ij}^2 \rangle = 1/N$  (variance)

$\langle a_{ij}a_{ji} \rangle = \gamma/N$  (asymmetry)

$\gamma = 1$  symmetric: mutualism or competition

$\gamma = 0$  asymmetric: any relationships

$\gamma = -1$  antisymmetric: predation, exploitation and parasitism

$\langle a_{ij}a_{kl} \rangle = 0$  for  $(i, j) \neq (k, l)$  or  $(i, j) \neq (l, k)$

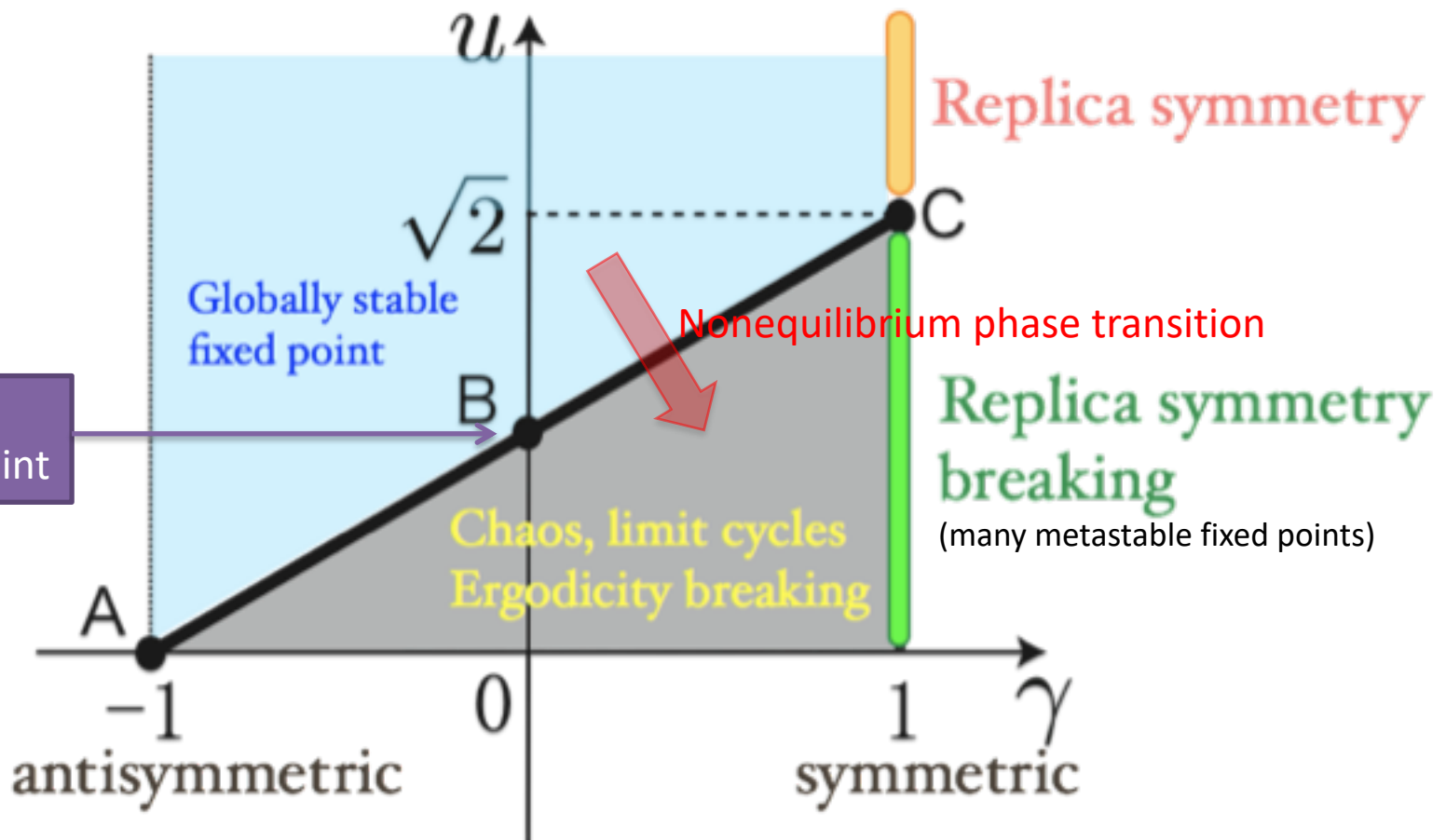
( $a_{ij}$  and  $a_{kl}$  are independently random each other)

# Phase diagram

Replicator Dynamics (RD)

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i(f_i - \bar{f}) \quad f_i \equiv \sum_j a_{ij}x_j$$

$$a_{ii} = -u \quad (\text{intraspecific competition})$$



I. RE w/ **symmetric**  
interactions

# Replicator dynamics w/symmetric interactions

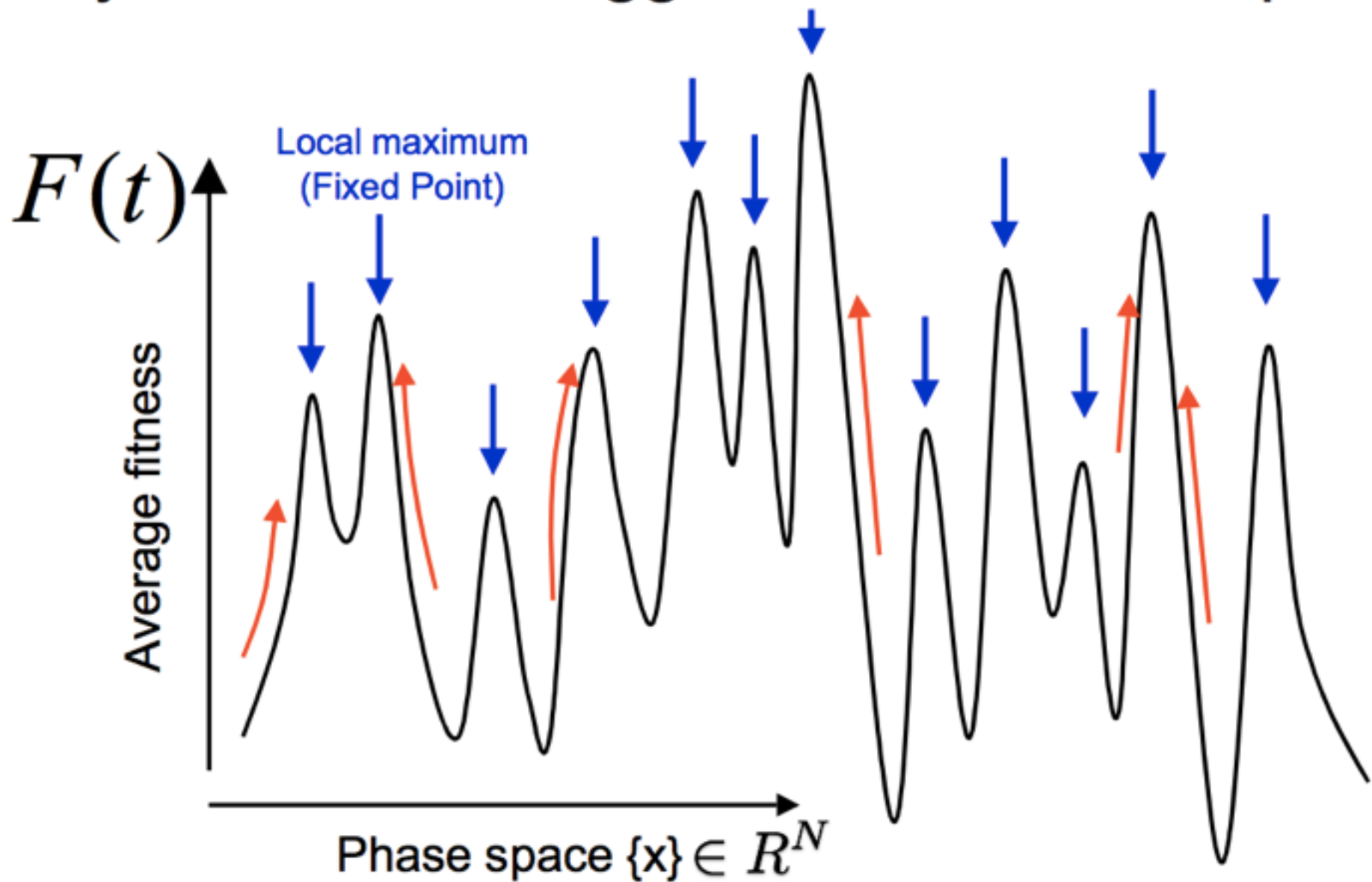
Average fitness  $F(t) \equiv \sum_{i,j}^N a_{ij} x_i(t) x_j(t) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{Ax}$   
is a **Lyapunov function**.

Proof: Since the matrix  $A$  is symmetric,

$$\frac{dF(t)}{dt} = \left( \frac{d}{dt} \right) (\mathbf{x} \cdot \mathbf{Ax}) = \left( \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) \cdot \mathbf{Ax} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \left( \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{2} \frac{dF(t)}{dt} &= \sum_i \frac{dx_i}{dt} (\mathbf{Ax})_i = \sum_i x_i [(\mathbf{Ax})_i - \mathbf{x} \cdot \mathbf{Ax}] (\mathbf{Ax})_i \\ &= \sum_i x_i (\mathbf{Ax})_i^2 - \left( \sum_i x_i (\mathbf{Ax})_i \right)^2 \\ &= \sum_i x_i [(\mathbf{Ax})_i - \mathbf{x} \cdot \mathbf{Ax}]^2 \geq 0 \end{aligned}$$

# Dynamics on a rugged fitness landscape



*Survival function:* proportion of species w/abundance larger than  $x$ .

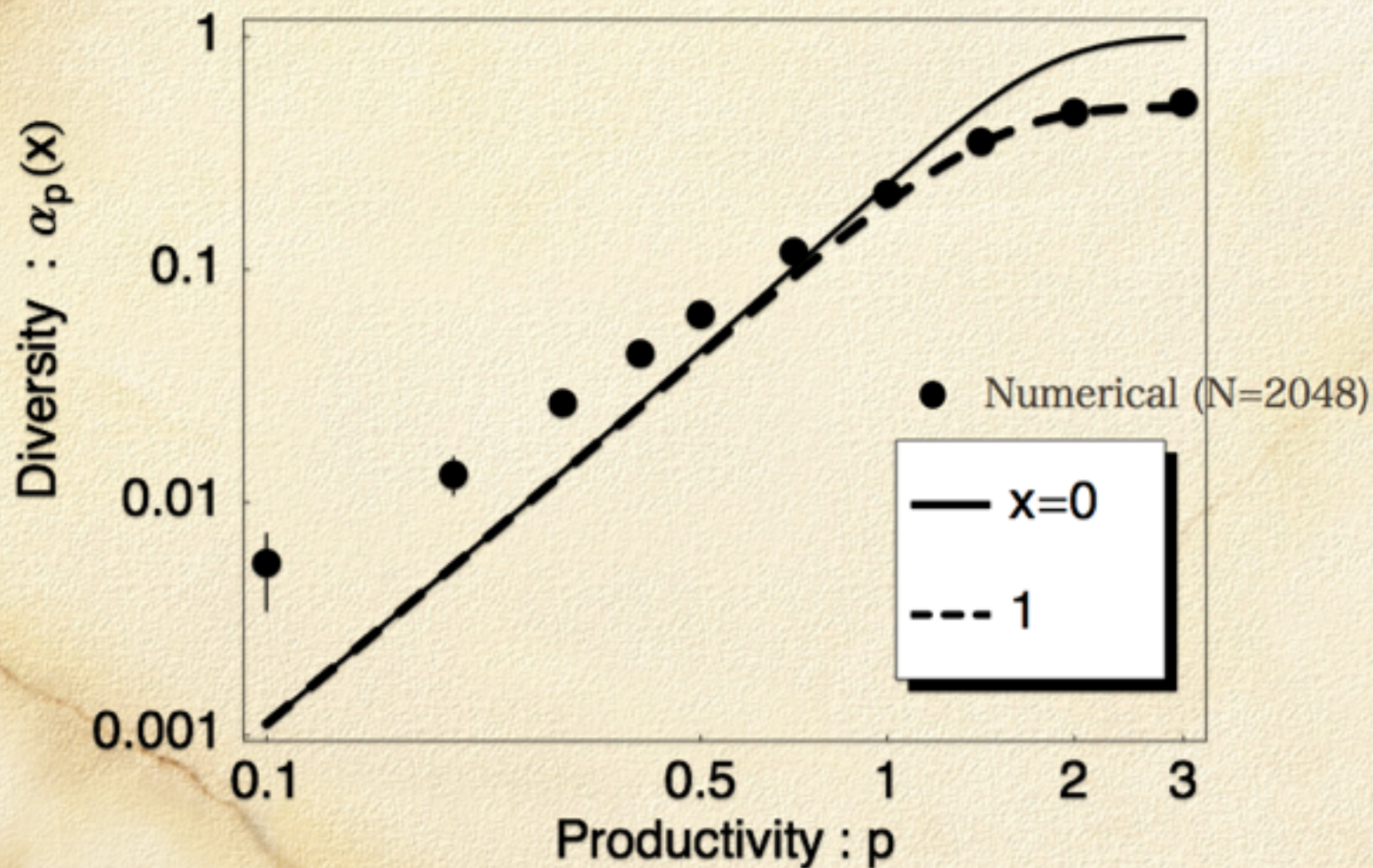
$$\begin{aligned}
 \alpha_\gamma(x) &\equiv \left[ \left\langle \frac{1}{N} \sum_i^N \theta(x_i - x) \right\rangle_T \right]_J \\
 &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \int_0^\infty \left( \prod_j^N dx_j \right) \theta(x_i - x) \delta \left( N - \sum_k^N x_k \right) \frac{\exp(-\beta \mathcal{H})}{Z} \right]_J \\
 &= \alpha_p(0) \tilde{\theta}(x) - \int_{-\Delta}^\infty dp_1(z) \tilde{\theta} \left( x - \frac{\sqrt{q}(z + \Delta)}{p - v} \right)
 \end{aligned}$$

*Diversity* (Number of non-extinct species)

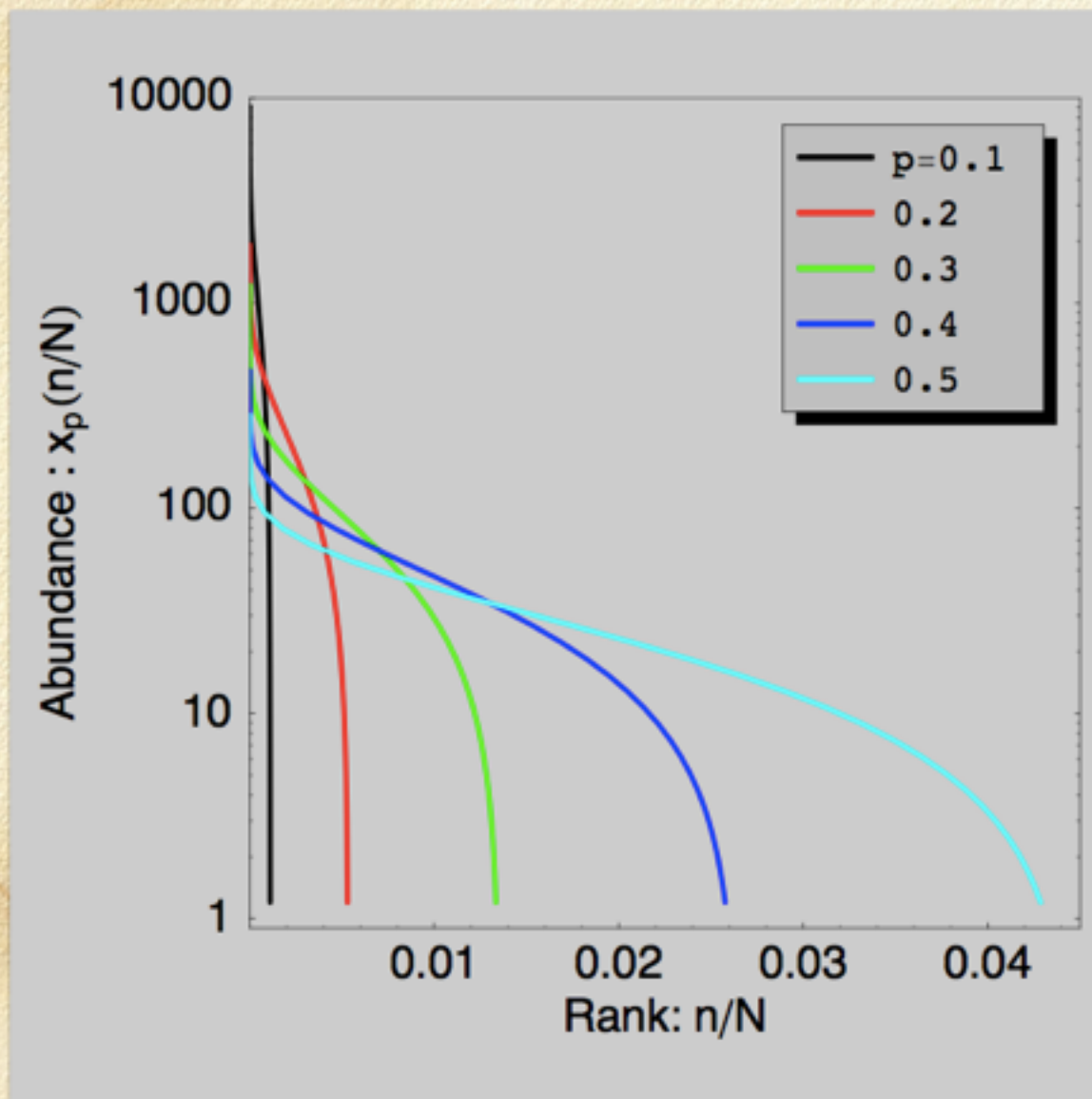
$$\alpha_p(0) \equiv v(p - v)$$

# Diversity as a function of productivity

Power law  $S \equiv N\alpha_p(x = 0, 1) \propto p^\eta$  ( $p \leq 1; \eta \simeq 2.3$ )



# Rank abundance relations





*Cumulative distribution function:* proportion of species w/abundance smaller than  $x$ .

$$\begin{aligned} C_p(x) &\equiv 1 - \alpha_p(x) \\ &= \underbrace{(1 - \alpha_p(0))}_{C_p(0)} + \int_{-\Delta}^{\infty} dp_1(z) \tilde{\theta} \left( x - \frac{\sqrt{q}(z + \Delta)}{p - v} \right) \end{aligned}$$

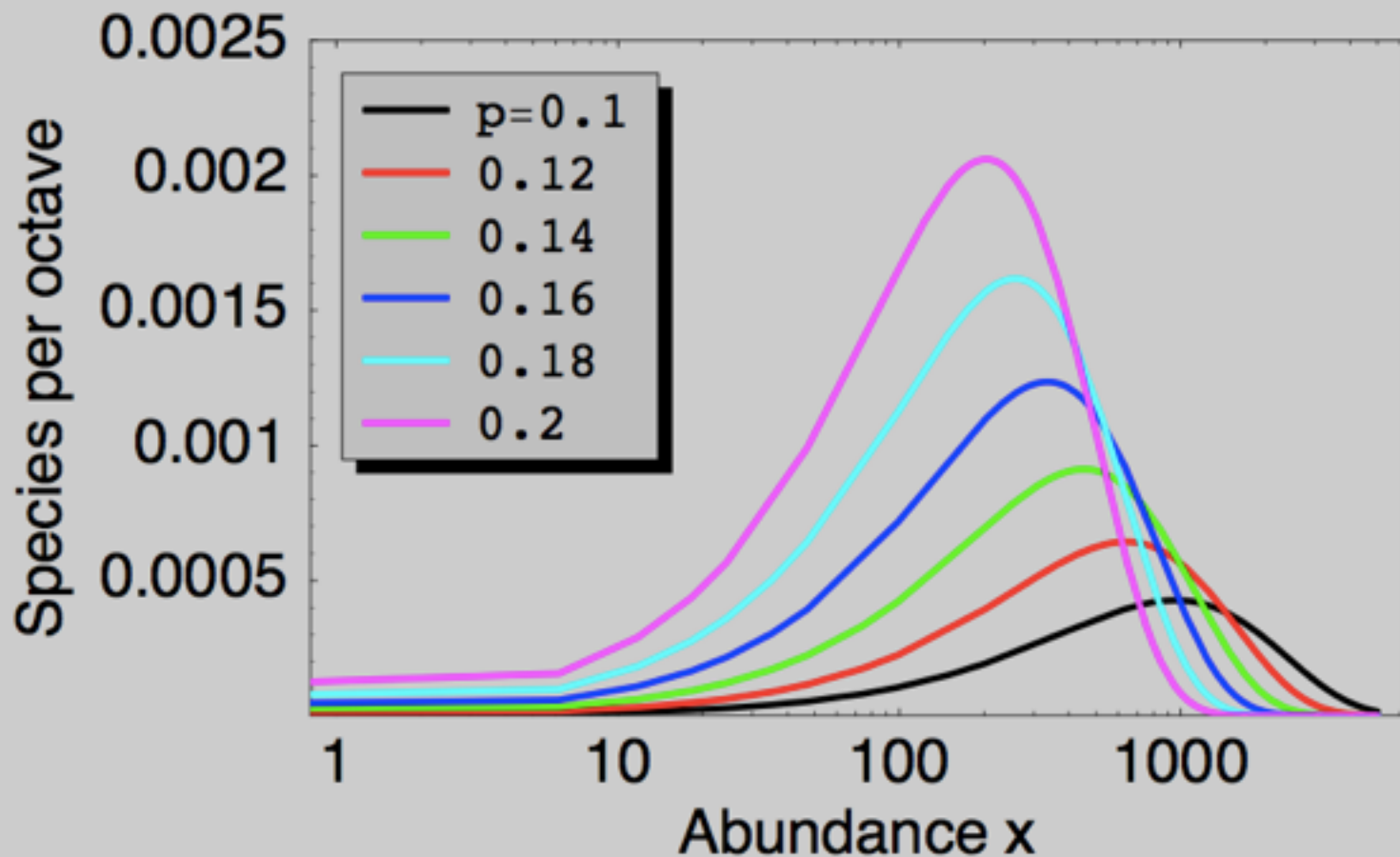
*Abundance distribution function*

$$\begin{aligned} F_p(x) &\equiv \frac{dC_p(x)}{dx} \\ &= \frac{p - v}{\sqrt{2\pi q}} \exp \left\{ -\frac{(p - v)^2}{2q} \left( x - \frac{q(p - 2v)}{p - v} \right)^2 \right\} + C_p(0) \delta(x) \end{aligned}$$

Normal distribution

# Abundance distribution

~ Left-skewed lognormal distribution



# Generating functional analysis for RD

Rieger 1989

Opper and Diederich 1992

Galla 2006, 2006

Yoshino, Galla & Tokita, 2007, 2008

Tokita and Galla, in prep.

N-species RD  $\frac{dx_i}{dt} = x_i(f_i - \bar{f}) \quad f_i \equiv \sum_j a_{ij}x_j$

path integral and average over ensemble of random matrix  $\{a_{ij}\}$

$$\overline{Z[\phi]} = \frac{\int Dx \left( \prod_i p_0(x_i(0)) \right) \exp \left( i \sum_i \int t \psi_i(t) x_i(t) \right)}{\times \prod_{i,t} \delta \left( \frac{\dot{x}_i(t)}{x_i(t)} - \sum_j J_{ij} x_j(t) + \phi(t) - h(t) \right)}$$

## Effective one-body dynamics

$$\dot{x}(t) = -x(t) \left[ ux(t) - \gamma \int_0^t dt' G(t, t') C(t, t') x(t') + \eta(t) - \phi(t) - h(t) \right]$$

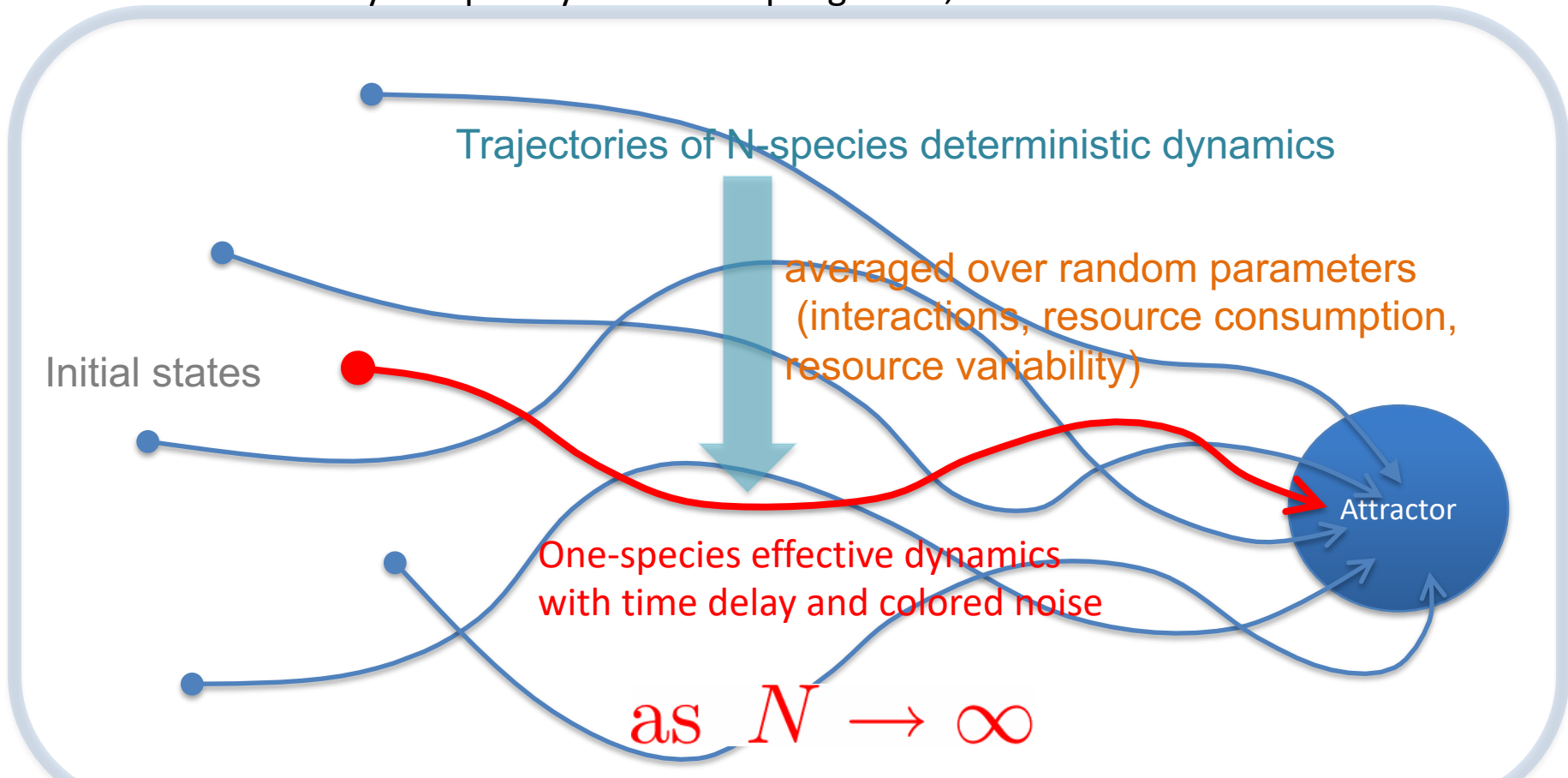
$$\langle \eta(t) \eta(t') \rangle = C(t, t') = \langle x(t) x(t') \rangle, \quad G(t, t') = \left\langle \frac{\delta x(t)}{\delta h(t')} \right\rangle$$

Correlation function

Characteristic function

# Generating functional (path integral)

A **field theoretical technique** for quantum field theory and other many complex systems like spin glasses, neural networks.



Applicable to nonequilibrium systems with no Hamiltonian

# Generating functional analysis for RD

Rieger 1989

Opper and Diederich 1992

Galla 2006, 2006

Yoshino, Galla & Tokita, 2007

Tokita and Galla, in prep.

## Effective one-body dynamics

$$\dot{x}(t) = -x(t) \left[ ux(t) - \gamma \int_0^t dt' G(t, t') C(t, t') x(t') + \eta(t) - \phi(t) - h(t) \right]$$

$$\langle \eta(t) \eta(t') \rangle = C(t, t') = \langle x(t) x(t') \rangle, \quad G(t, t') = \left\langle \frac{\delta x(t)}{\delta h(t')} \right\rangle$$

fixed-point ansatz  $\forall \tau \lim_{t \rightarrow \infty} C(t + \tau, t) = q, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = \phi$

translational invariance (steady state)  $\lim_{t \rightarrow \infty} G(t + \tau, t) = G(\tau)$

algebraic eq.

ergodic, no memory  $\chi = \int_0^\infty d\tau G(\tau) = \chi < \infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} G(t, t) = 0$

## Equilibrium population

$$x(z) = \frac{\phi - \sqrt{q}z}{u - \gamma} \Theta[\phi - \sqrt{q}z] \quad (z : \text{standard Gaussian})$$

# Self-consistent equations for order parameters

$$u - \gamma\chi = \sqrt{Q} \int_{-\infty}^{\Delta} Dz(\Delta - z)$$

$$(u - \gamma\chi)^2 = \int_{-\infty}^{\Delta} Dz(\Delta - z)^2$$

$$(u - \gamma\chi)\chi = \int_{-\infty}^{\Delta} Dz$$

$$\Delta = \phi / \sqrt{Q}$$

Survival function : rate of non-extinct species w/population larger than  $x$

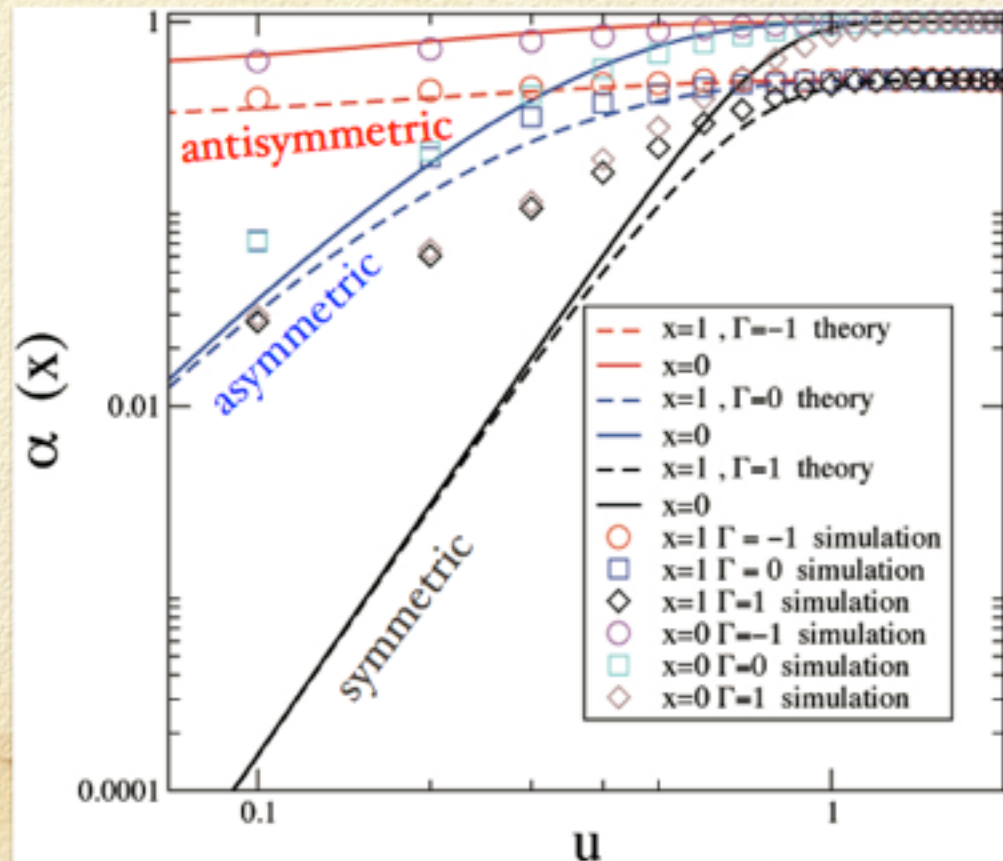
- diversity

$$\alpha(x) = \int_{-\infty}^{\Delta} Dz \Theta \left[ \Delta - z - \frac{u - \gamma x}{\sqrt{q}} \right]$$

higher

diversity

lower



Perfect coexistence only for  $u \rightarrow \infty$

## Species abundance relations

For  $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_S$  ( $S \equiv \alpha(0)N$ )

$$\alpha(x) = \frac{n}{N} \quad \text{for } x \in [x_{n+1}, x_n)$$

$n$ -th most abundant species is given by the inverse function as

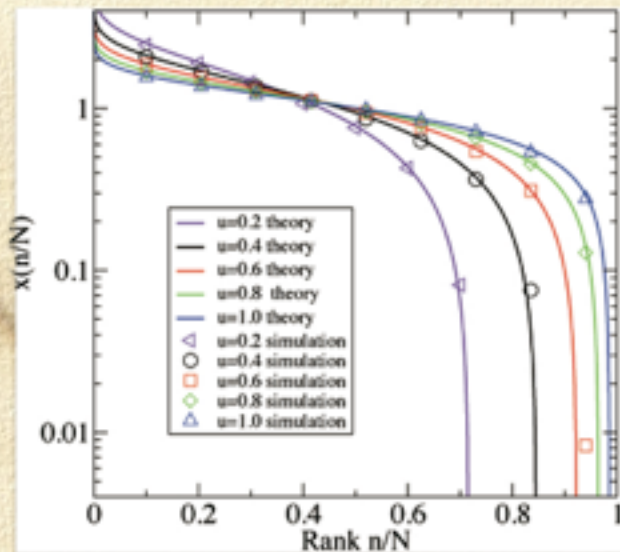
$$x(n/N) = \alpha^{(-1)}(n/N)$$



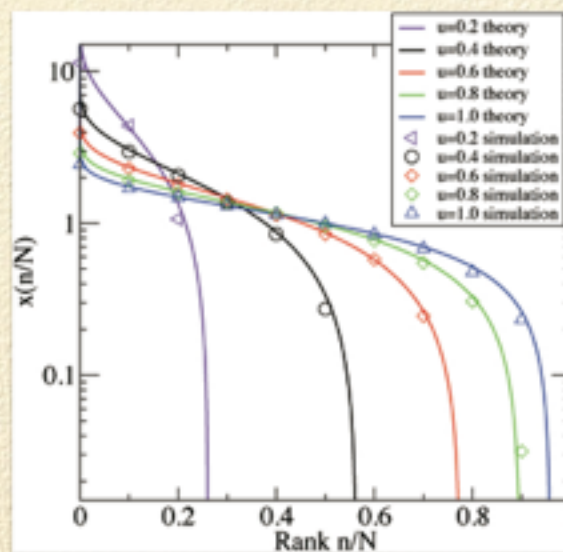
# Rank-abundance relations

$$x(n/N) = \alpha^{(-1)}(n/N)$$

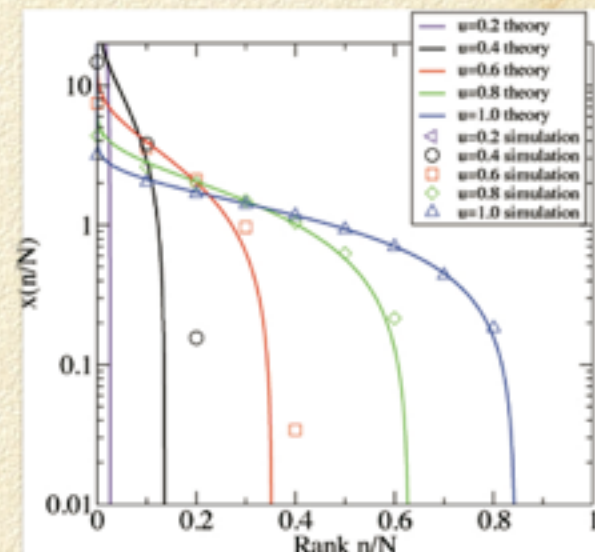
higher ← species diversity → lower



$\gamma = -1$  : antisymmetric  
prey-predator, foodweb



$\gamma = 0$  : fully asymmetric  
no correlation, any relations



$\gamma = 1$  : symmetric  
competition or mutualism only

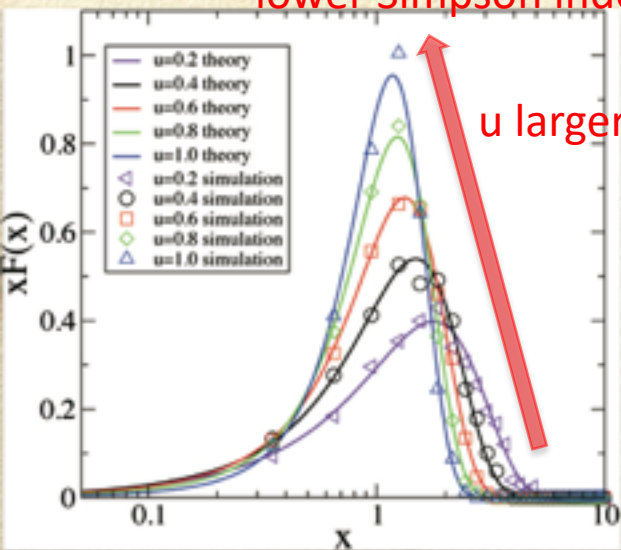
# Species abundance distribution in "Preston's octave" plot

$$F(x) = \frac{d}{dx} (1 - \alpha(x))$$

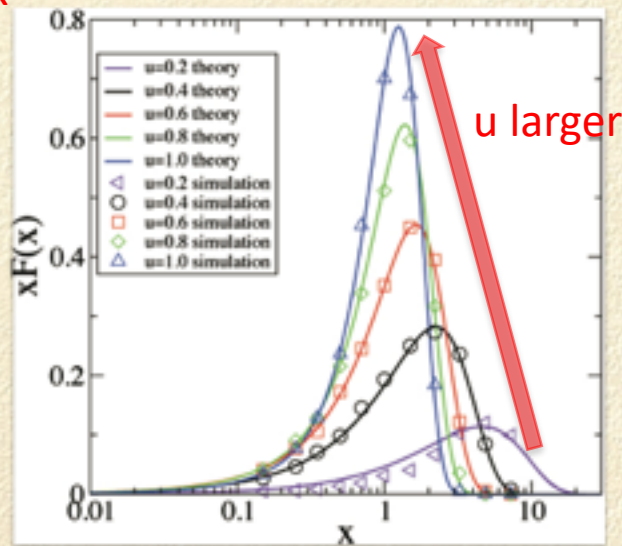
$$= \frac{u - \gamma x}{\sqrt{2\pi q}} \exp \left[ -\frac{(\kappa - (u - \gamma x)x)^2}{2q} \right]$$

productivity

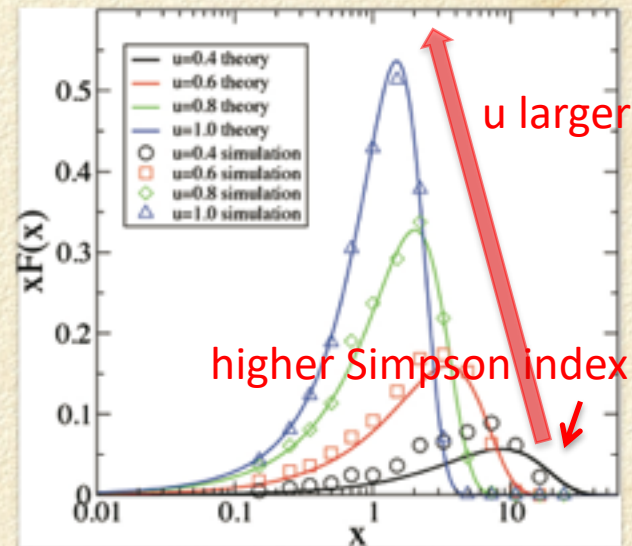
lower Simpson index



$\gamma = -1$  : antisymmetric  
prey-predator, foodweb



$\gamma = 0$  : fully asymmetric  
no correlation, any relations



$\gamma = 1$  : symmetric  
competition or mutualism only

# Conclusions

- The first analytical derivation of the **species abundance distributions** for replicator dynamics (RD) with general random interactions.

	antisymmetric (prey-predator, foodweb) zero-sum game	asymmetric (no correlation, any type) random pay-off	symmetric (mutualism or competition only)
$\gamma$	-1	0	1
Species richness	higher	↔	lower
Stability	higher	↔	lower
Left skewedness	lower	↔	higher

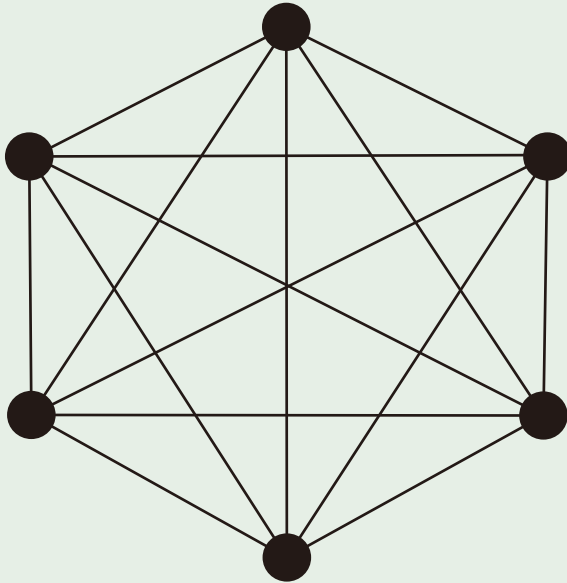
# Random Community Model with Random Sparse Interactions

Obuchi, Kabashima and Tokita, 2016

# All-to-all interactions and **sparse** interactions

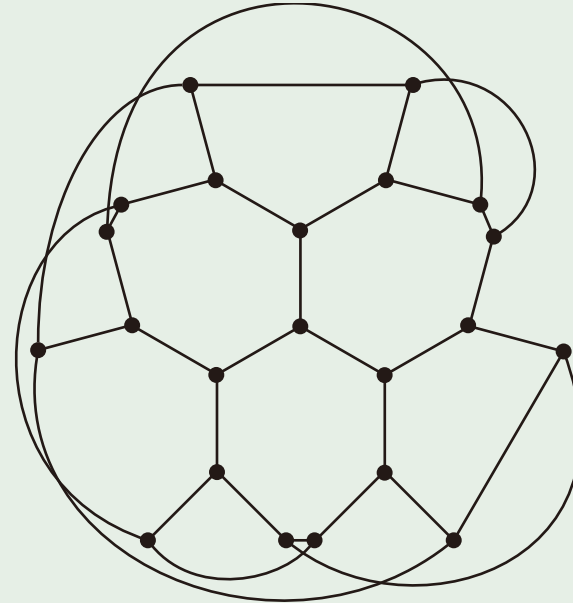
## All-to-all interactions

Degree  $c = N - 1 \sim O(N)$ ;  $N = 6$



## **Sparse** interactions

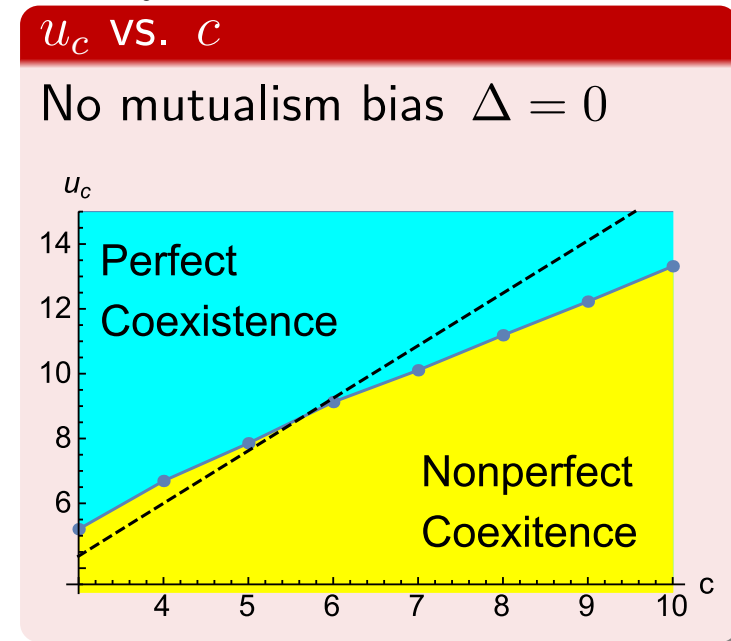
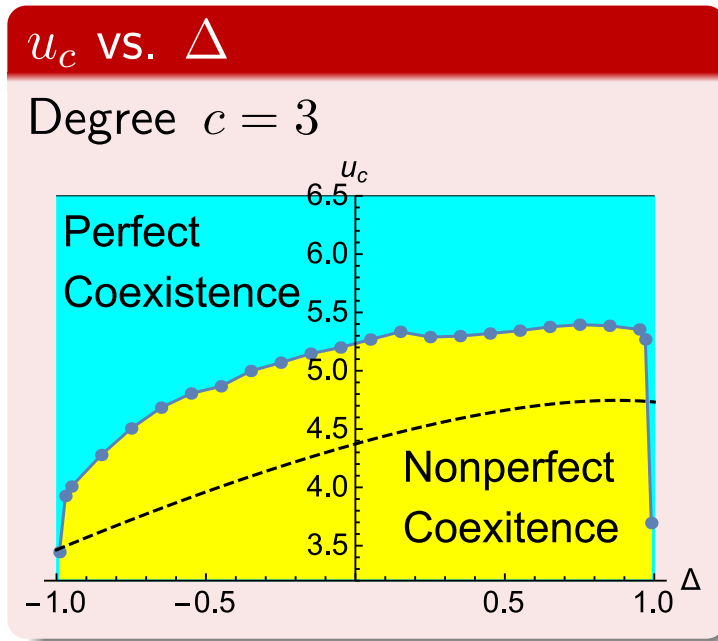
Degree  $c = 3 \ll N$ ;  $N = 22$



Statistical mechanics of a sparsely-interacted system has progressed recently ([Kabashima and Takahashi 2001](#), [Mezard and Montanari 2009](#)).

# Results: Phase diagram

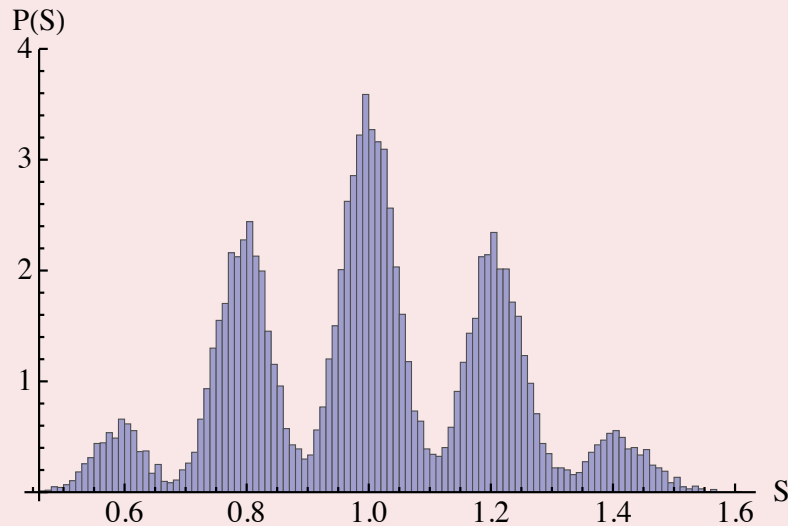
The area of **perfect coexistence** is emerged for finite value of  $u_c$  in contrasted to  $u_c = \infty$  for RRD w/all-to-all  $J_{ij}$ .



- Dashed curves: 2nd order perturbation expansion up to  $u^{-2}$ .
- Symbols: Non-perturbative solution by the cavity method.
- Both parameters are the **unstability** factor except for the singular point  $\Delta = -1(1)$ , i.e., every  $J_{ij} = -1(1)$ , respectively, i.e., completely neutral case.

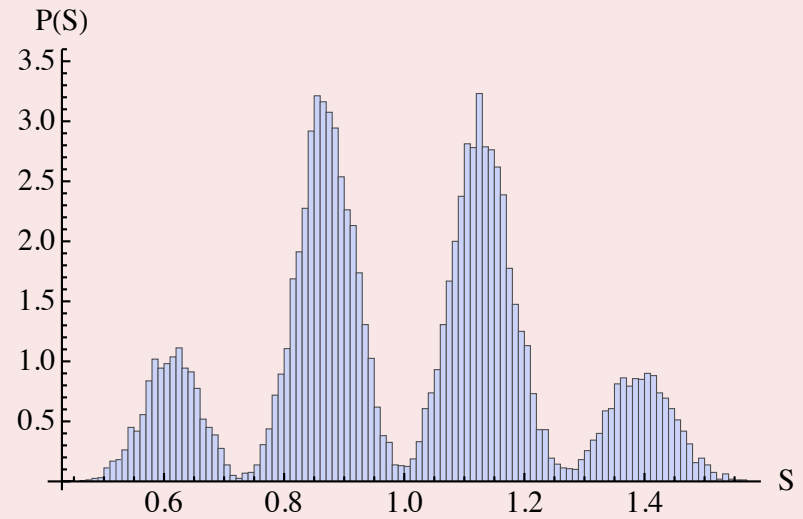
# Results: SAD: Direct numerical simulation

## SAD for RRD on Square Lattice



Degree  $c = 4$ ,  $u = 10$ ,  $\Delta = 0$ ,  
 $N = 128 \times 128 = 16384$ .  
 $J_{ij} = \pm 1$ ,

## SAD for RRD on Random Graph



Degree  $c = 3$ ,  $u = 7$ ,  $\Delta = 0$ ,  
 $N = 16000$ ,  
 $P(J_{ij}) = N(0, 0.1)$  (Gaussian).

# まとめ

- 多様性
- 多様性の科学
- 多様性の指標と種の豊富さのパターン
  - ランク-サイズ関係
  - 種個体数分布
  - Zipfの法則とHeaps則
  - ジニ係数
- 種個体数分布の統計物理学的導出
  - 種内競争大: 種個体数分布 ~ 正規分布 → 「公平」
  - 相互作用の対称性: 不安定要因
  - 相互作用の「次数」(グローバル化): 不安定要因