

変遷を続ける
ネットワーク系の
頑健性について



東京大学

数理・情報教育研究センター 数学基礎教育部門

大学院工学系研究科 システム創成学専攻

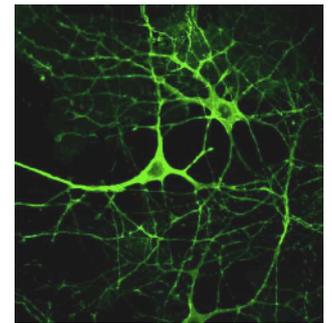
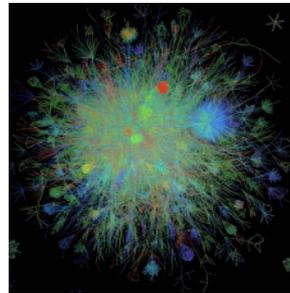
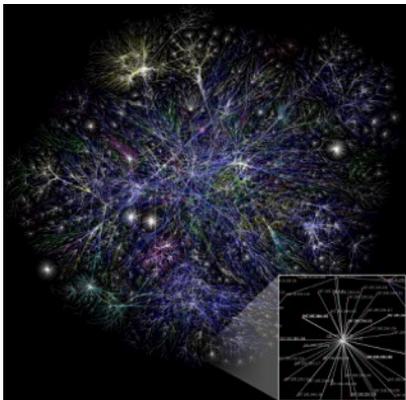
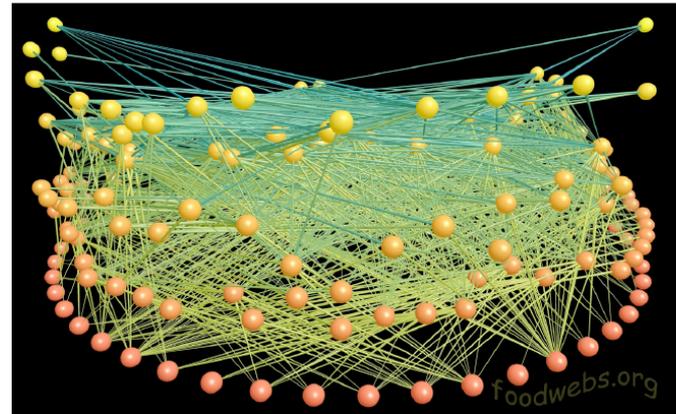
島田 尚

現実の系はなぜ複雑な構造を維持/成長できるのか？

一般の系の頑健性は近年の複雑ネットワーク科学においても中心課題

- 生物生態系、微生物生態系
- 遺伝子・蛋白質相互作用ネットワーク
- 脳、ニューラルネット（発生）
- **経済系（eg. 金融ネットワーク）**
- 社会系
- 分散制御の工学システム

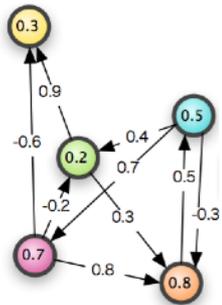
El Verde Rainforest (located in the Caribbean National Forest in Puerto Rico)



(Nature 464 1025 (2010))

大規模系の複雑性-頑健性関係

- 1950s：相互作用が密な方がより安定 (MacArthur, Ecology (1955))
- 1970s~現在：線形安定性に基づく不安定性の発見 (R. May, Nature (1972))
 - » feasibility (Gilpin Nature (1975)), 除去安定性 (Pimm OIKOS (1979)),
E.-A. models (Taylor JTB (1988)), 相互作用の構造 (近藤 Science (2003), 時田 PRL (2004)) ,...
- 1990s~：自己組織臨界性 (Bak & Sneppen PRL (1993))
- 2000~複雑ネットワーク科学における構造と頑健性との関係
 - » ランダム故障と故意の攻撃に対するネットワーク脆弱性 (Barabasi et al., Nature (2000))
 - » カスケード故障 (Watts, PNAS Vol. 99, pp. 5766-5771 (2002))
 - » 多層ネットワークにおける転移の変化 (Havlin et al., Nature (2010))
 - » 「タマネギ形」構造 (Herrmann et al., PNAS (2011))



+ 変化し続ける系の頑健性についての新しいシナリオ

大規模で複雑な系の不安定性

(Gardner & Ashby, Nature (1970), R. May, Nature (1972))

N 自由度の一般の常微分方程式系を考える

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \dots, x_N).$$

平衡状態があったとして、その状態近傍での線形安定性を考えると

$$\frac{d\delta x_i}{dt} = \sum_j f_{ij} \delta x_j,$$

対角項には -1 (独立なら安定)、

元の系で相互作用があった組については乱数、

相互作用の無かった組については 0 を割り当て

→ ランダム行列の固有値分布問題に帰着

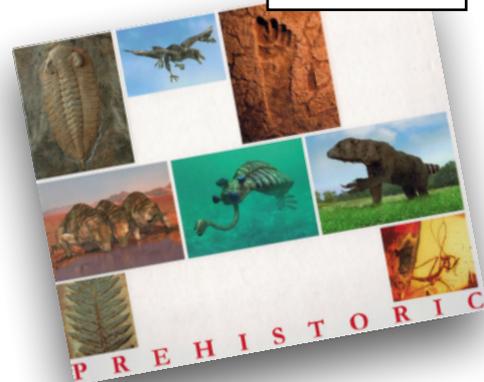
$$f_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & r_1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_2 & -1 & \cdots & r_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & r_M & \cdots & -1. \end{pmatrix}$$

→ 各要素はたった 1 本しか相互作用を持ってない

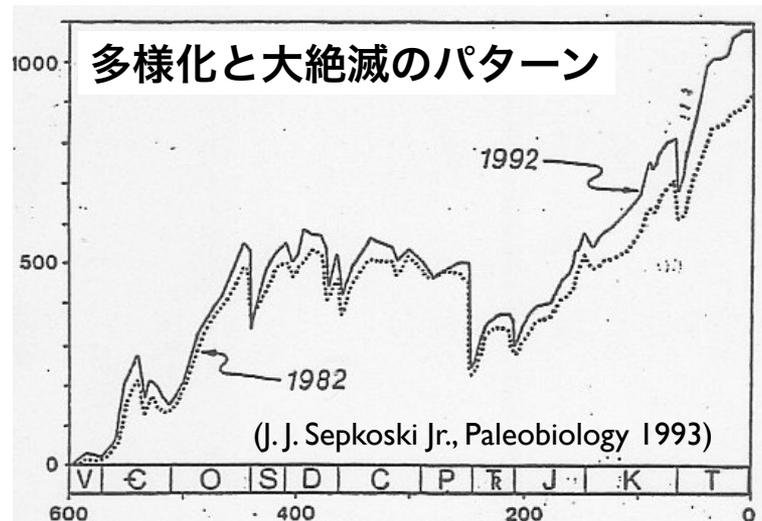
- A. 数理生態学：生態系特有の相互作用や構造があるのでは？ (M. Kondoh, Science 2003)
- B. そもそも線形安定性で評価すべきか？
- C. 系の複雑性を少しずつ増やしていけば良いのでは？ (Evolutionary Assembly models)

A ← “生態系”といっても今昔様々

太古からの
生物生態系



生物科の総数 (多様性)



(6億年前) -地質学的年代-> (現在)

(そもそも...)

Connectance of Large Dynamic (Cybernetic) Systems: Critical Values for Stability

Many systems being studied today are dynamic, large and complex: traffic at an airport with 100 planes, slum areas with 10⁴ persons or the human brain with 10¹⁰ neurones. In such systems, stability is of central importance, for instability usually appears as a self-generating catastrophe. Unfortunately, present theoretical knowledge of stability in large systems is meagre: the work described here was intended to add to it.

◆ 生態系の置かれた条件は色々に違ったはずだが、
構造・分布に普遍的な特徴がうかがわれる

◆ このような系の安定性の起源自体が大きな謎

→ 共存を許す機構と種々の普遍分布の関係性を理解できないか？

お菓子の“生態系”



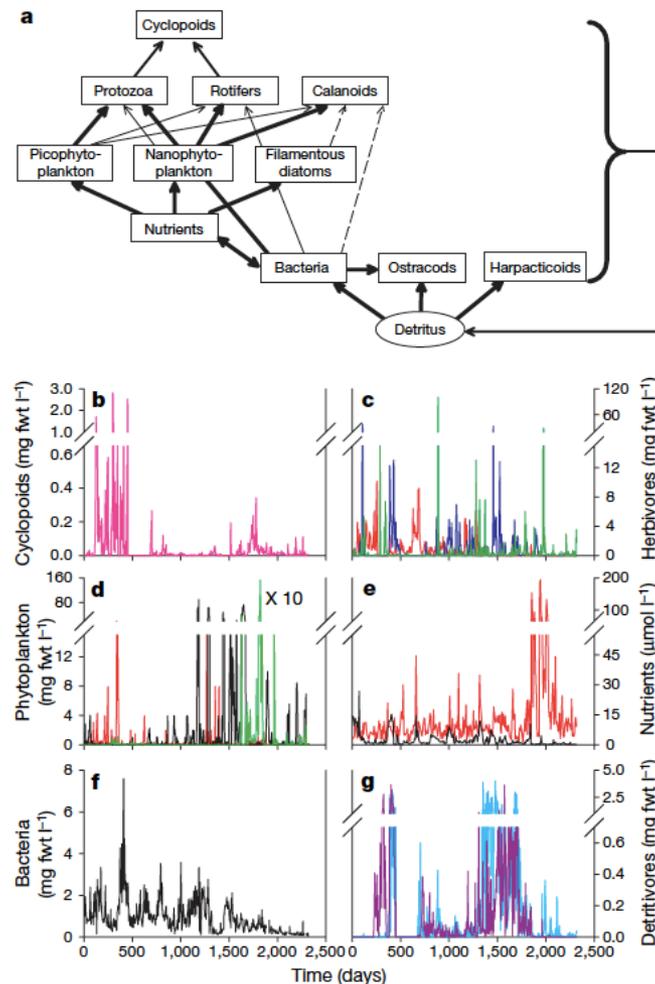
T. Shimada, S. Yukawa, & N. Ito *Artificial Life and Robotics (AROB)* 6, 78-81 (2002)
T. Shimada, S. Yukawa, & N. Ito *Int. J. of Mod. Phys. C* 14, 1267-1271 (2003)
T. Shimada, Y. Murase, N. Ito, & K. Aihara *AROB* 11 153-156 (2007)
 Y. Murase, **T. Shimada**, & N. Ito *AROB* 13 460-463 (2009)
 Y. Murase, **T. Shimada**, N. Ito & P. A. Rikvold, *J. of Theor. Biol.* 264, (2010) 663-672.
 Y. Murase, **T. Shimada**, N. Ito & P. A. Rikvold, *Phys. Rev. E* 81, (2010) 041908.

A: 現実の系は非常にダイナミック

- 強い非線形性（特に絶滅まで含めると）
- 決定論的カオス
- ノイズが無視できない

→ 線形安定性（局所安定性）ではなく、より大きな揺動に対する安定性が重要！

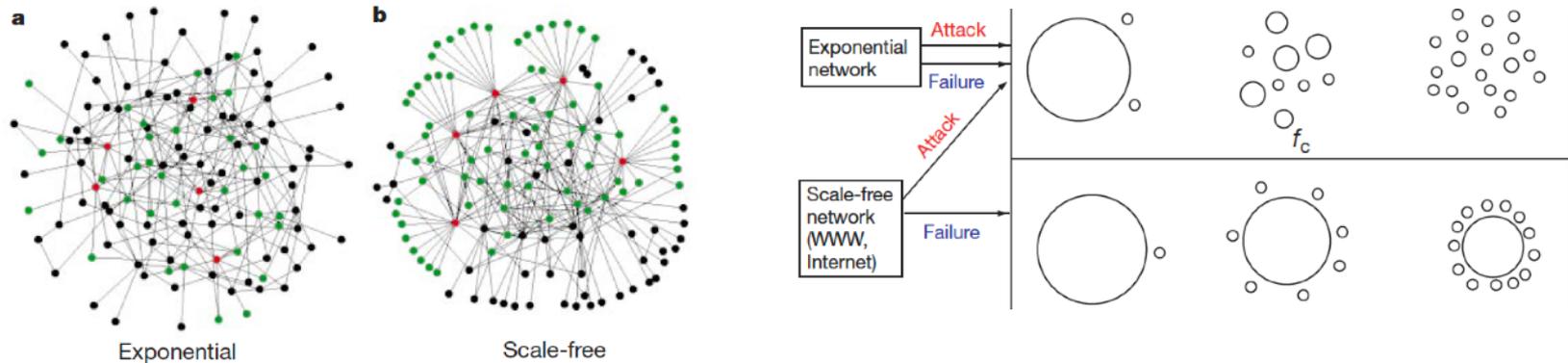
“Apparently, stability is not required for the persistence of complex food webs.”



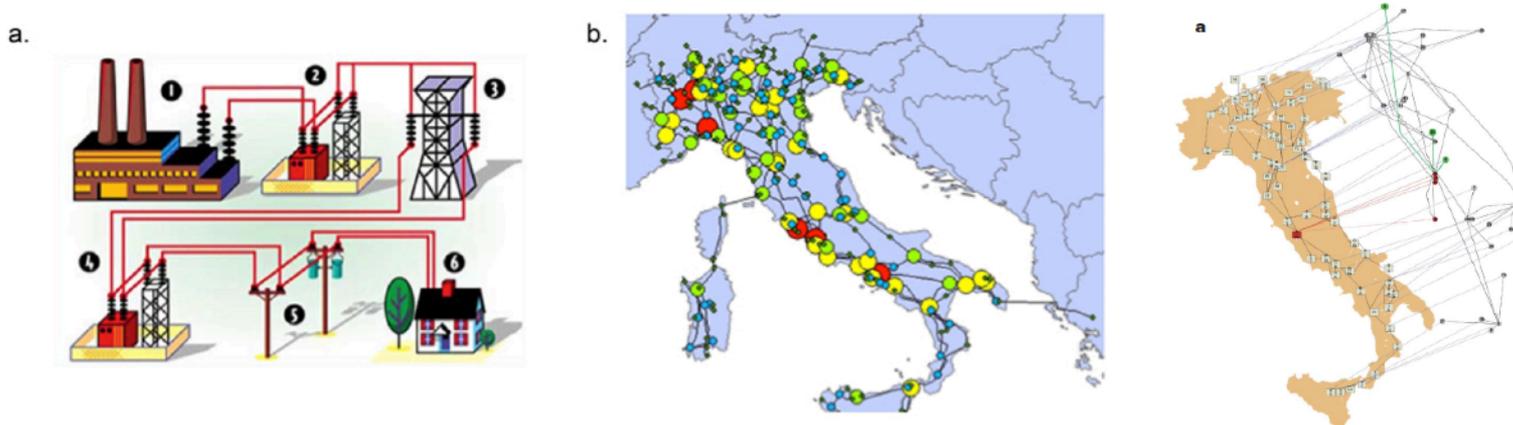
“Chaos in a long-term experiment with a plankton community” E. Beninca et al., Nature vol. 451, 822 (2008)

B: ネットワークの構造→頑健性の話題

(複雑ネットワーク科学、2000~)



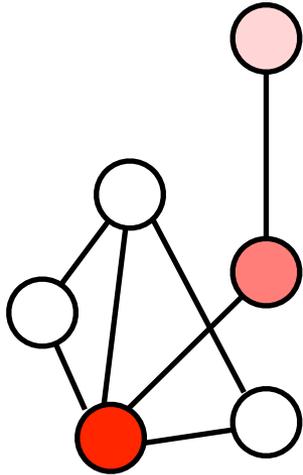
現実の系はスケールフリー性を持つ（次数がベキ分布）
→ ランダム故障に強いが攻撃に弱い(Nature **406** 378 (2000))



現実の系（電力網など）は、相互依存したネットワークであることが多い
→ カスケード故障の性質がより悪い（不連続転移）かも (Nature **464**, 1025 (2010))

B構造→頑健性：ネットワーク上の伝搬

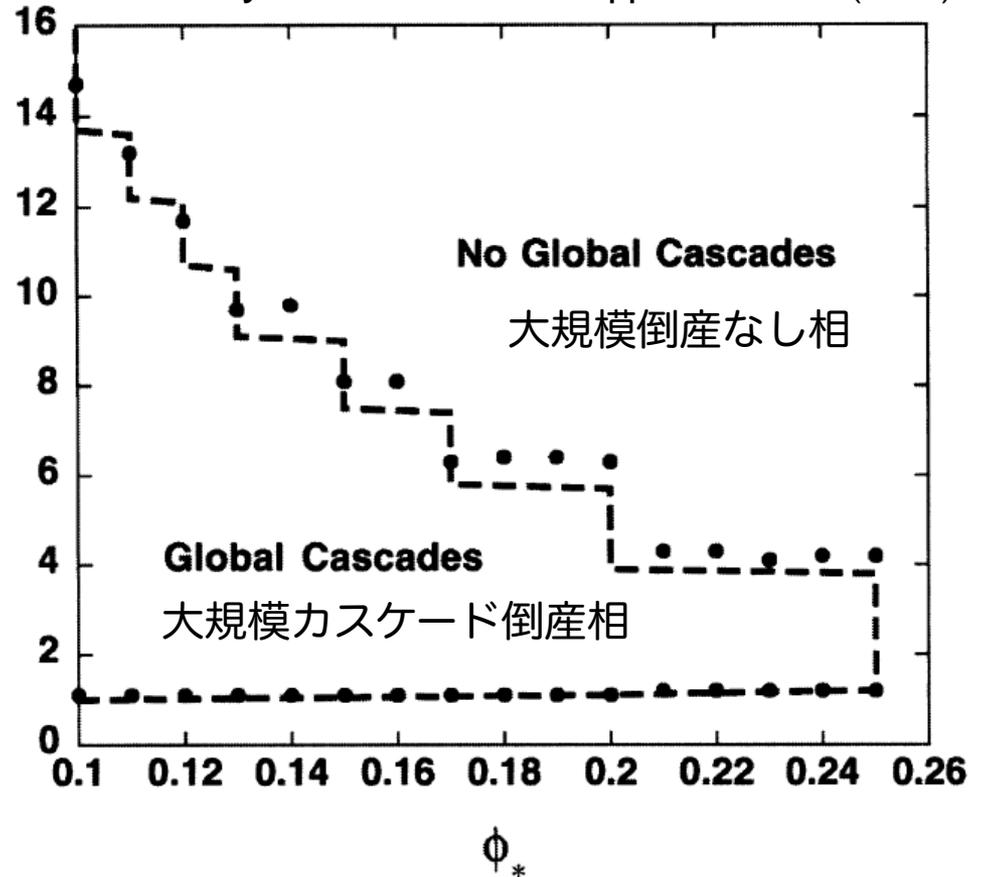
(倒産、故障、病気、噂、イノベーション、...)



z

1. ランダムグラフを用意
2. 初期に少数を“倒産”させる
3. 隣接ノードのうち ϕ の割合が倒産したらそのノードも倒産する
→ カスケード倒産

Duncan J. Watts, PNAS Vol. 99, pp. 5766-5771 (2002)



ネットワーク構造 & 各ノードの頑健性は手で与える



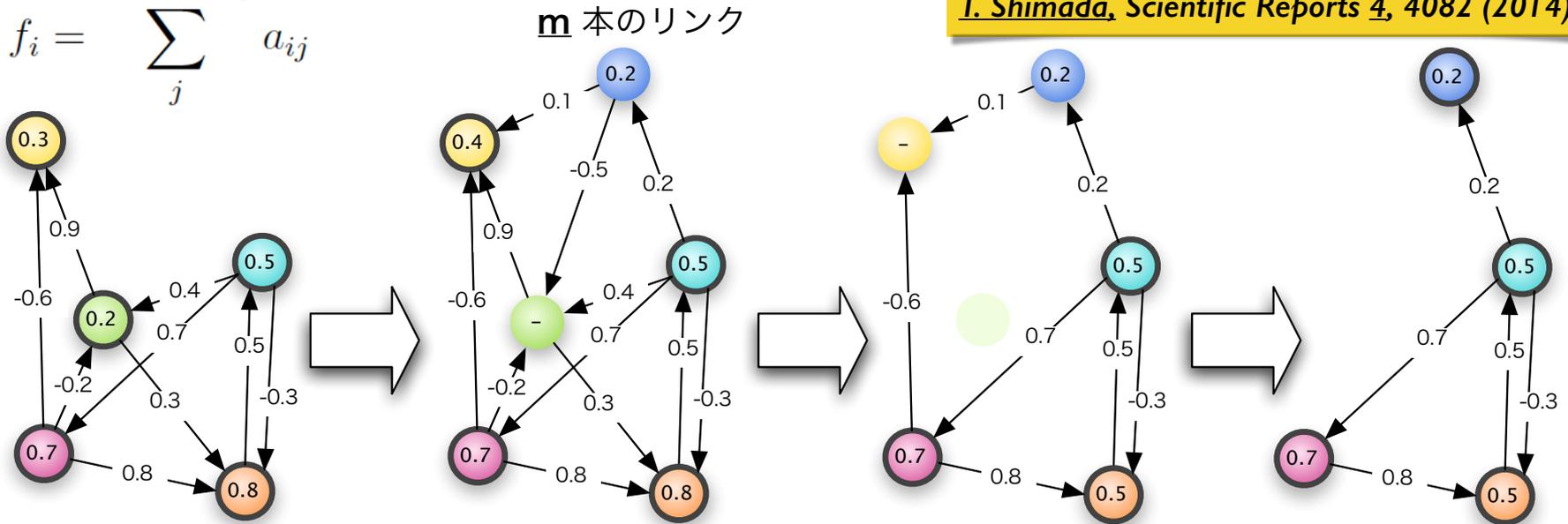
変遷し続ける系の
頑健性は
どう考えれば良い？

- A. 数理生態学：生態系特有の相互作用や構造があるのでは？ (M. Kondoh, Science 2003)
- B. そもそも線形安定性で評価すべきか？
- C. 系の複雑性を少しずつ増やしていけば良いのでは？ (Evolutionary Assembly models)

開放進化系のミニマルモデル

T. Shimada, Scientific Reports 4, 4082 (2014)

$$f_i = \sum_j^{\text{incomming}} a_{ij}$$



(a) 「安定」な群集構造 (b) 新種（新規要素）の導入 (c) 新種導入による絶滅 (d) 新しい安定構造

1. フィットネスが正でなければ生き残れない： $f_i = \sum_j^{\text{in}} a_{ij} > 0$
2. 安定状態になったら、**m**本の相互作用を持つ新種を導入
 - ▶ 既存の種と方向を含めランダムにつなぐ
 - ▶ 相互作用係数 a_{ij} は標準正規分布からランダムに決める（平均 0, 分散 1）

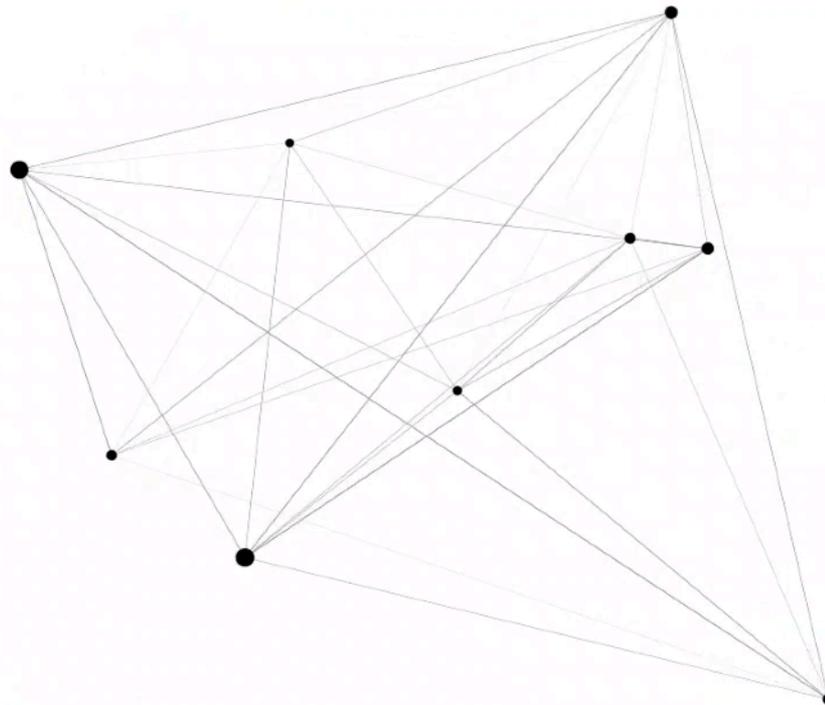
m（新規種毎に導入する相互作用の本数）： このモデル唯一のパラメーター

問題

新種の導入：中立 ($\langle a_{ij}^{(new)} \rangle = 0$)

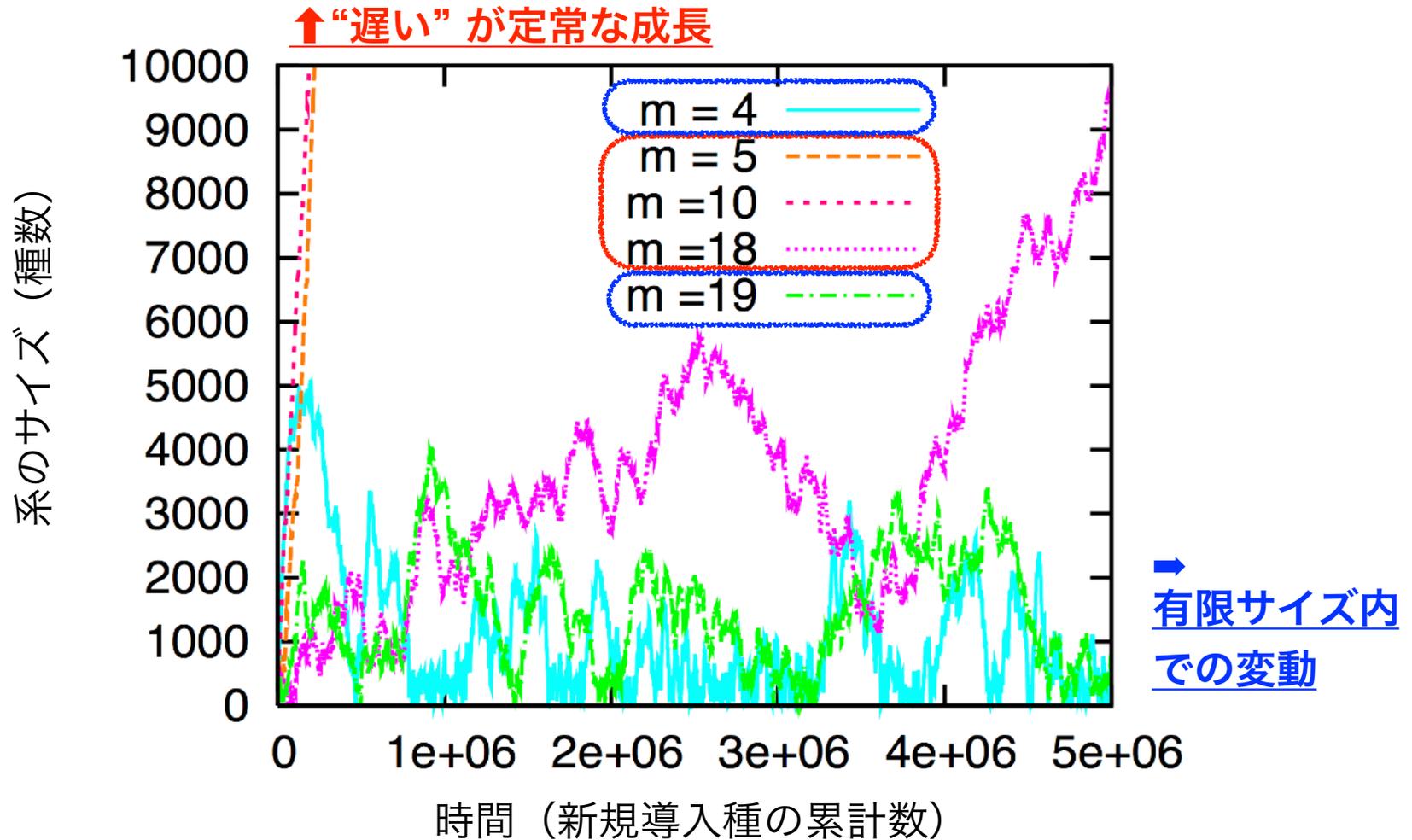
絶滅ルール：中立 ($f_i > 0$)

新要素の追加によって系は成長できるか?



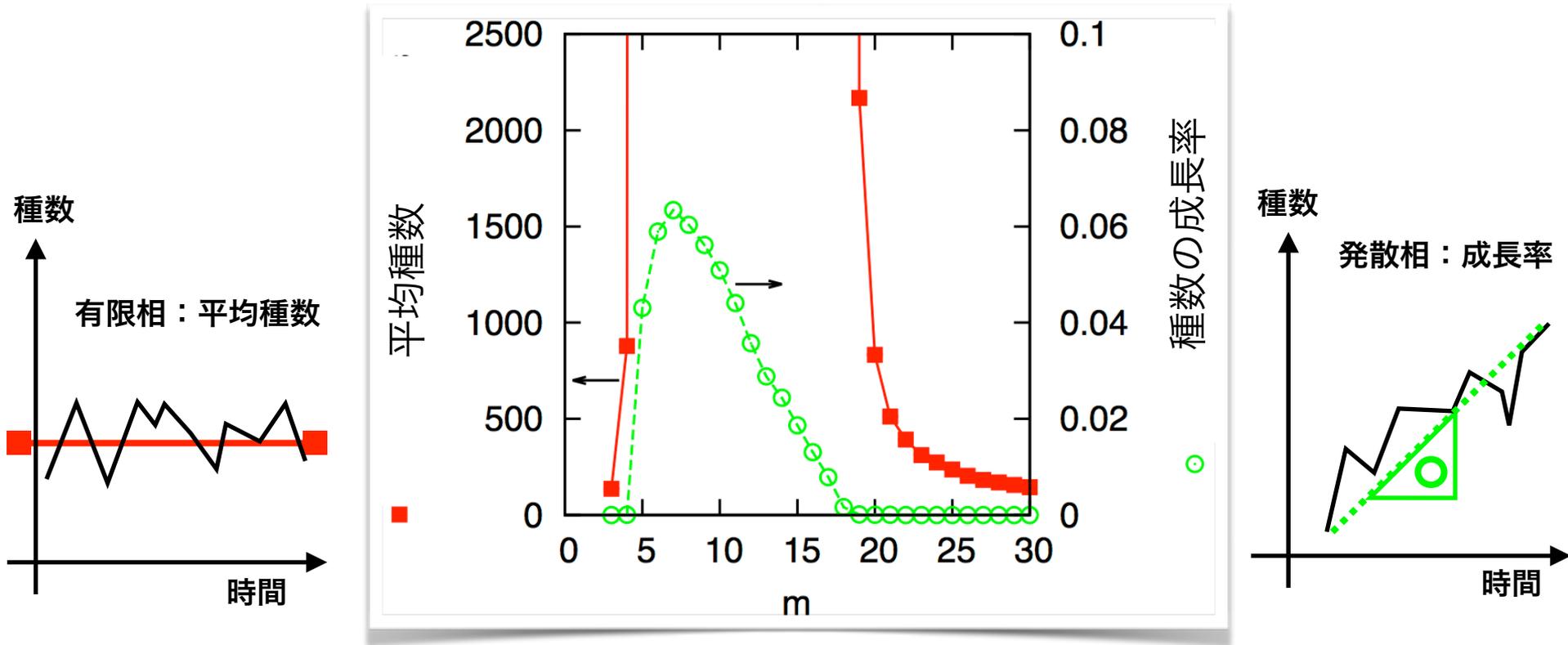
M = 10
τ = 0
n = 10

系の成長は相互作用本数 m によって決定される



m を増やすにつれ、有限相 → 多様化相 → 有限相 の2回の転移

開放進化系モデルの相図



📌 非自明な発散相→有限相転移が $m_c = 18.5$ で起きる理由は？

📌 ($m_c = 4.5$ での一回目の転移の理由は比較的簡単)

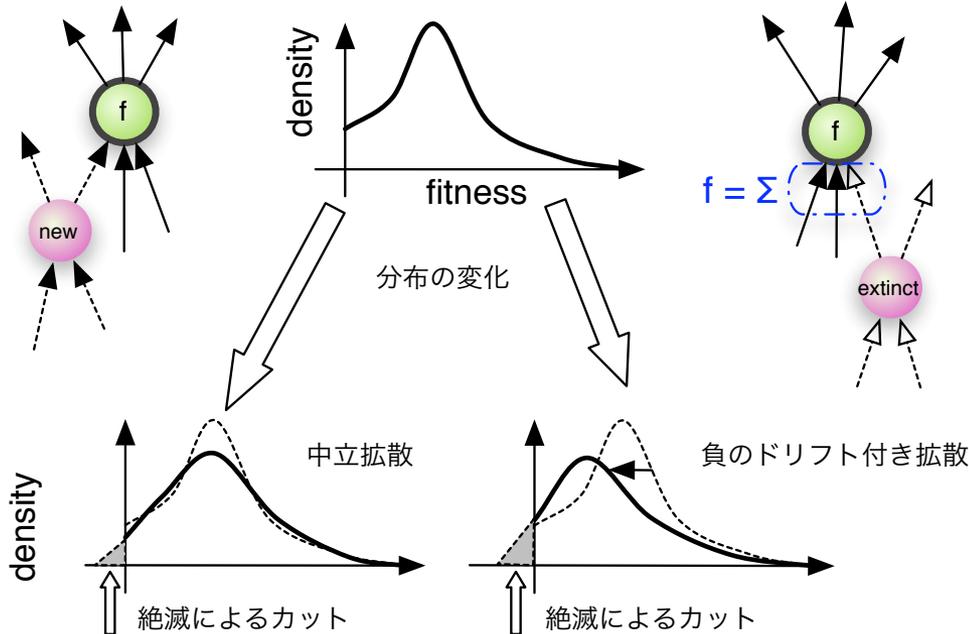
📌 $m = 4$ のとき、正の重みを持った自分向き相互作用の本数の期待値は1本
→ 生存を支えているネットワークは一次元的で、非常にちぎれやすい

“平均場近似”モデル

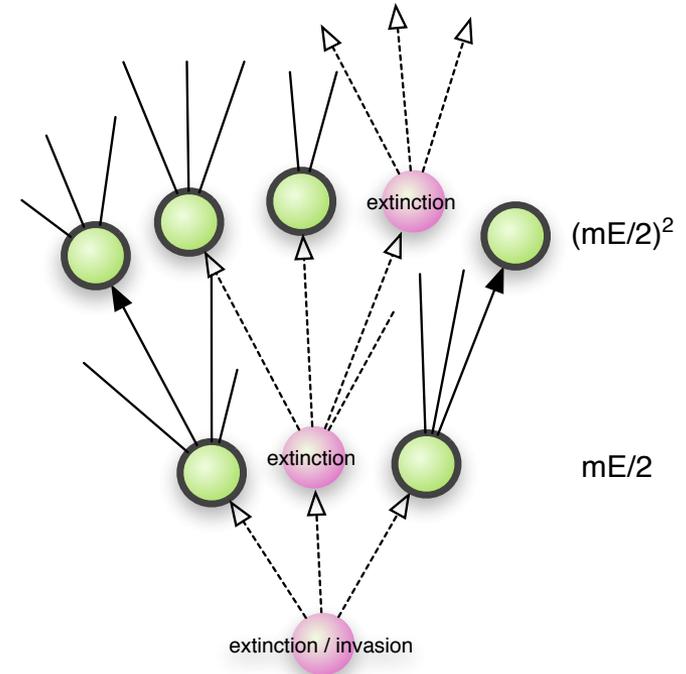
(フィットネス分布関数についての畳み込み+カットの繰り返し過程)

新種導入イベント

絶滅イベント



(a) 新種導入・絶滅イベント時のフィットネス分布関数の変化



(b) 絶滅カスケードと総計絶滅数

$$N_E = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{mE}{2}\right)^n = \frac{mE}{2 - mE}$$

T. Shimada, Scientific Reports 4, 4082 (2014)

T. Shimada, Springer monograph “Mathematical Approaches to Biological Systems” chapter 5 (2015)

Semi-analytical estimation of the mean-field transition point

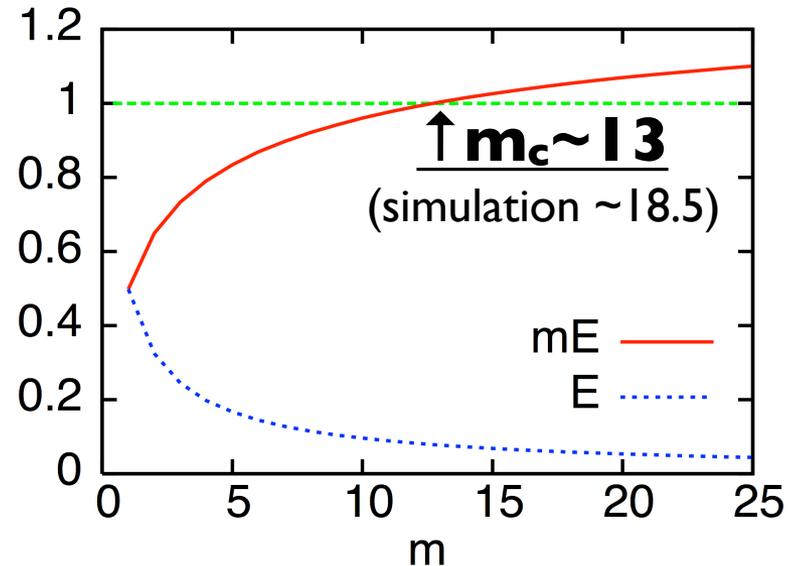
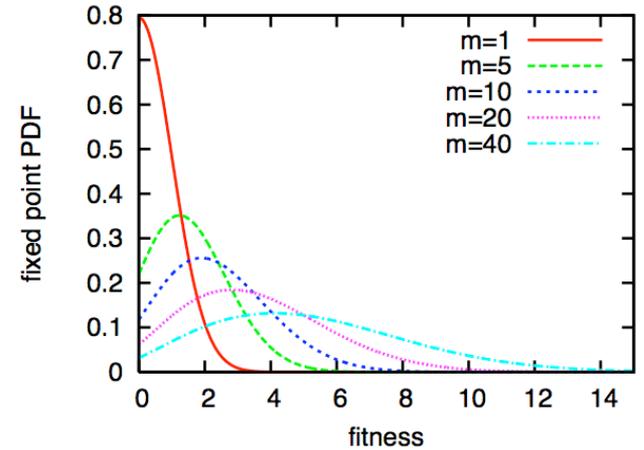
$$F_0(m, x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ 2G(\sqrt{\frac{m}{2}}, x) & (x > 0) \end{cases}$$

$$F_{g+1}(m, x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ \int_0^\infty \beta^{-1} F_g(m, \beta^{-1}\xi) G(1, x - \xi) d\xi & (x > 0) \end{cases}$$

$$\beta = \frac{m-1}{m}$$

$$E(m) = \frac{\sum_{g=0}^{\infty} n_g(m) E_g(m)}{\sum_{g=0}^{\infty} n_g(m)} = \frac{1}{\sum_{g=0}^{\infty} n_g(m)}$$

$$n_g(m) = \int_0^\infty F_g(m, x) dx$$

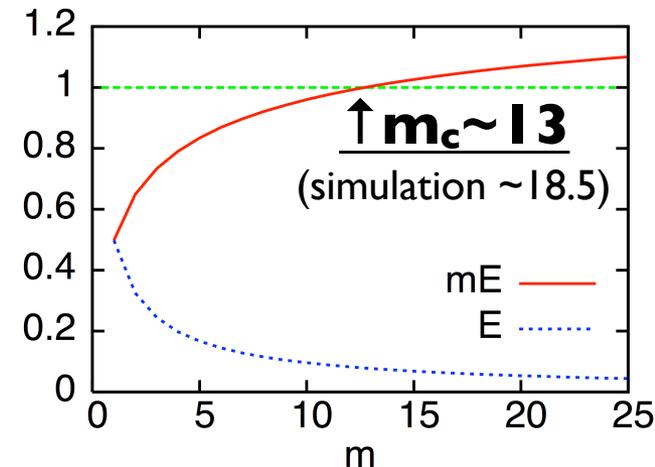


平均場モデルから分かる 新しい頑健性転移の基本的機構

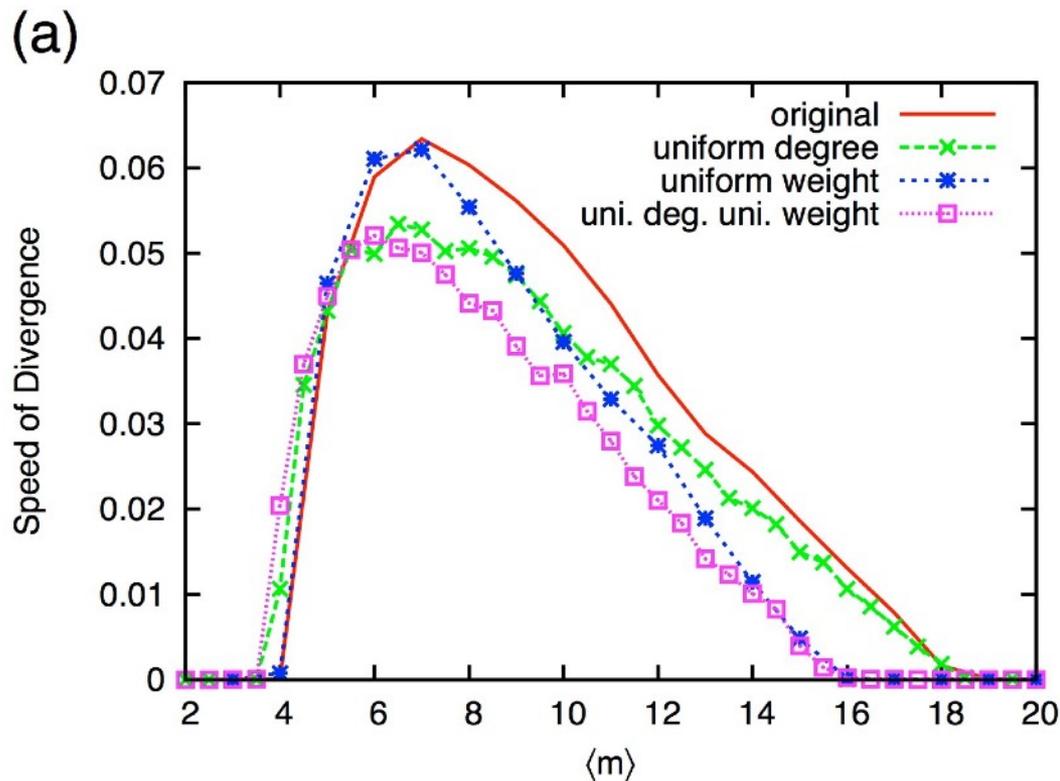
- 弱い選択圧による適応 + 際限ない適応や構造化の抑止
(フィットネスに比例した負のドリフト)
勝ち続ける種が決して出ない (現在の優位は将来の優位を保障しない)

- $\sigma^2 \sim m/2 \rightarrow$ イベントあたり絶滅率 E は m の遅い減少関数
相互作用が多い方が個々の頑健性は増す

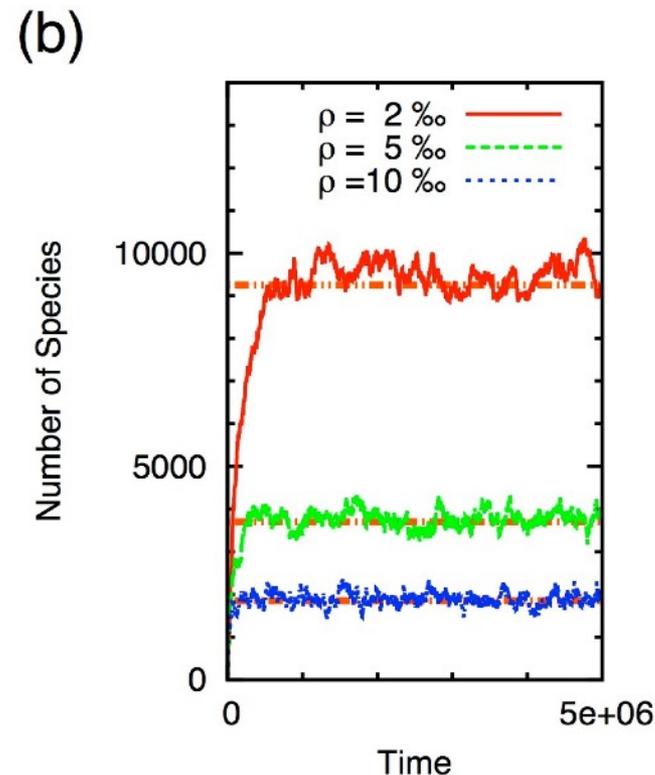
- $mE/2$ は m に対して遅い増加関数
 \rightarrow 系全体の頑健性転移！
相互作用が多い方が系全体の頑健性は下がる



頑健性転移構造はモデルの 詳細に依らず成り立つ



(a) 結合重みや結合数分布を変えたモデル
においても相図の形は変わらない

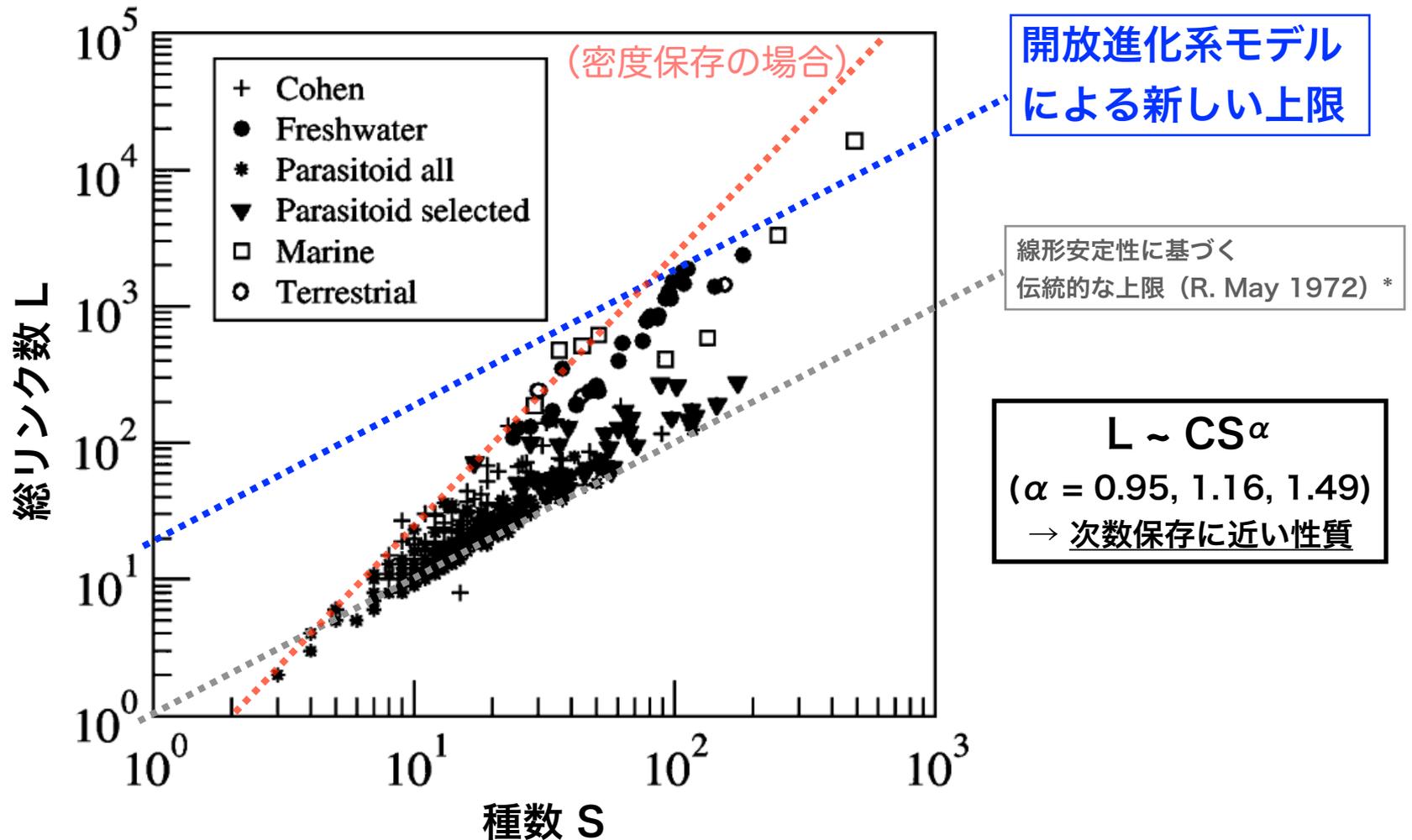


(b) 相互作用**密度**の指定:

$$N(t) \sim N^* = 18.5/\rho$$

生態系における相互作用数は適度に疎

(T. C. Ings et al., J. Animal Ecology (2009))



*LVに基づく反論: C. Jaquet et al., "No complexity–stability relationship in empirical ecosystems" NatComm. (2016)

種々の現実系でも相互作用は適度に疎*

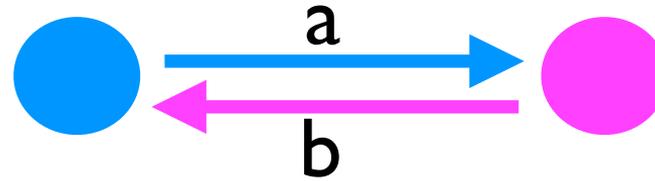
($\langle k \rangle \ll N$ i.e. 密度でなく次数に上限)

システム	要素数 (N)	平均次数 ($\langle k \rangle$)
生態系 (¹ Ythan estuary, ² Sliwood park)	134 ¹ , 154 ²	8.7 ¹ , 4.75 ²
代謝ネットワーク (大腸菌)	778	7.4
遺伝子制御ネットワーク	4,000~27,000	大腸菌: 2.5~4.5, イースト: 3~8, 27, シロイヌナズナ: 5~14
インターネット (WWW)	2×10^8	7.5
インターネット (ルーター)	1.5×10^5	2.66
共著関係 (脳神経科学分野)	209,293	11.54
(範囲)	$10^2 \sim 10^8$	$10^0 \sim 10^1$

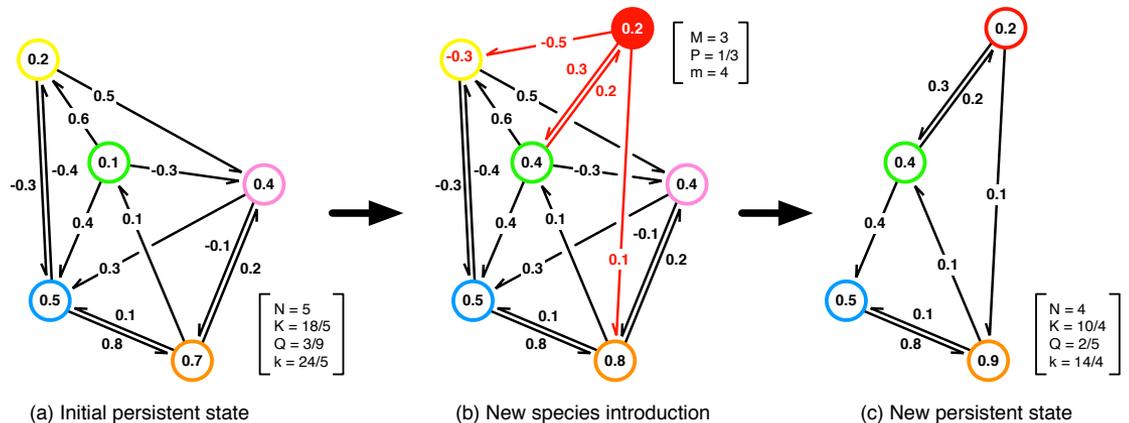
*“Statistical Mechanics of Complex Networks” R. Albert & A.-L. Barabasi (2001) 及び

PNAS 102, 7841 (2005), Network Biology 1, 21 (2011), Science 298, 799 (2002), Nature 431, 308 (2004), Molecular System Biology 5, 294 (2009), Science 303, 808 (2004), Genome Research 17, 1614 (2007), Genome Biology 10, R96 (2009) より

現実の系での相互作用には 双方向性があるものが多い

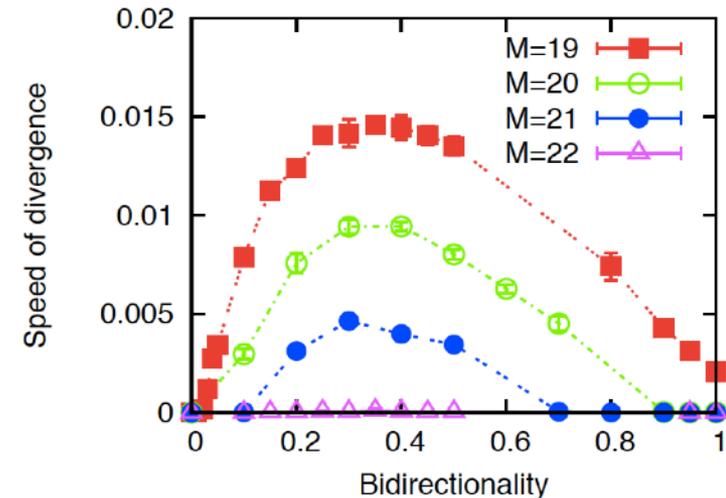
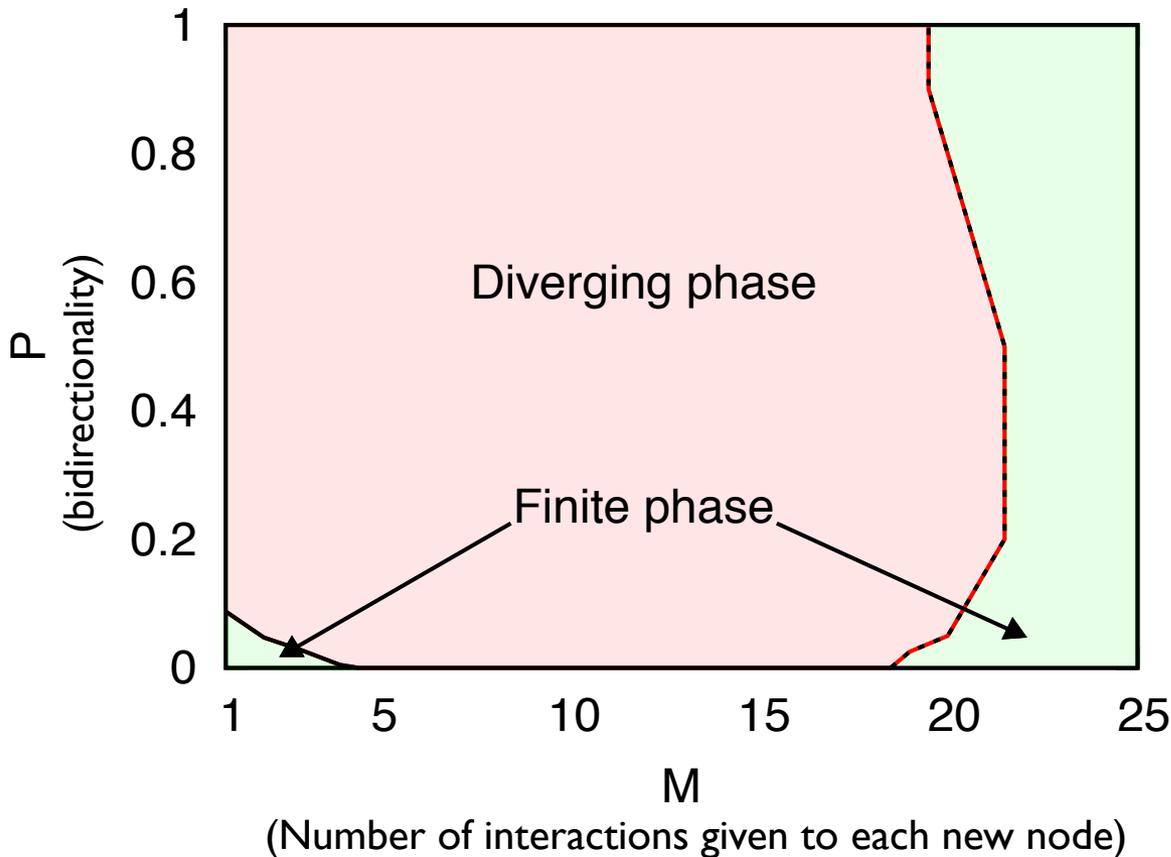


→ 双方向性を入れたモデル



部分的に 双方向性がある場合:

最適な双方向性の割合が存在



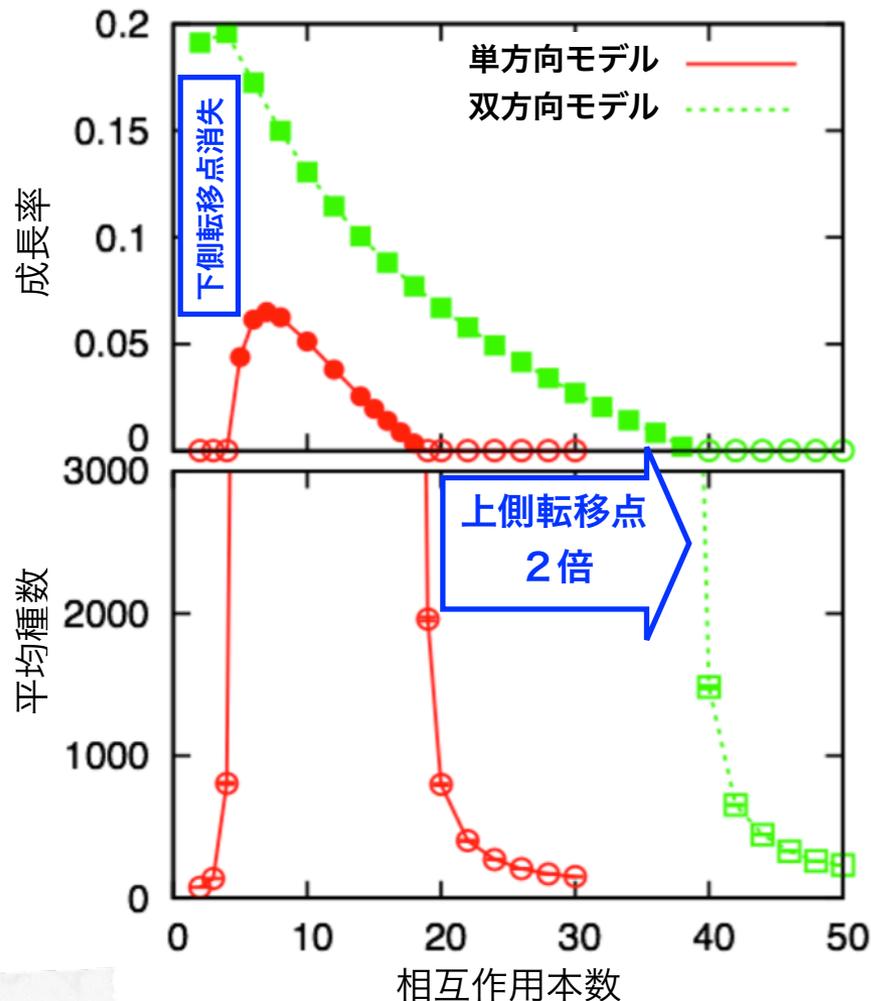
+ 双方性の構造を入れても
転移構造そのものは保たれる

相互作用が100%双方向的な場合

相互作用を双方向的 (ランダム) にすると、系はより頑健になる

相互作用の種類

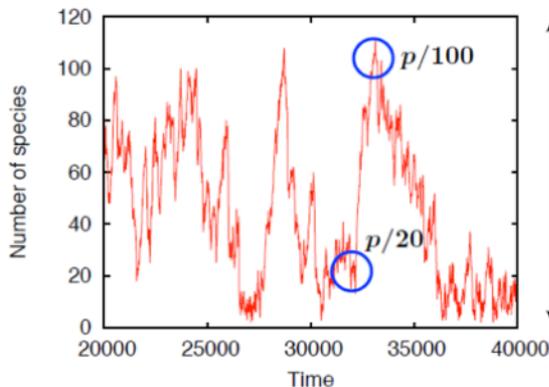
相互作用のタイプ	モデル表記	例
興奮性	$X \xrightarrow{+} Y$	信号伝達、片利共生
抑制性	$X \xrightarrow{-} Y$	信号伝達、嫌がらせ
協力的	$X \xrightleftharpoons{+} Y$	共生、協力
捕食的	$X \xrightleftharpoons{+} Y$	寄生、収奪
競争的	$X \xrightleftharpoons{-} Y$	相互抑制、阻害



“種の寿命”の普遍分布 (skewed profile)

も自然に再現される

修正赤の女王仮説: 齢に依らず、かつ系のサイズに反比例する絶滅率 ($\sim 1/N$) を仮定



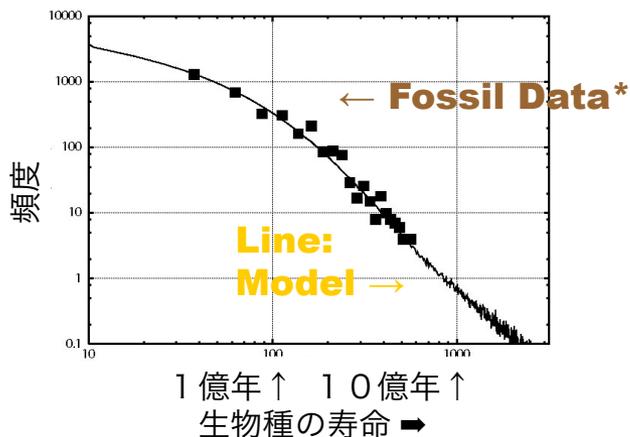
$$p(t) = \int_0^{\infty} \frac{\exp(-t/\tau)}{\tau} b \exp(-b\tau) d\tau$$

$$= 2bK_0(2\sqrt{bt})$$

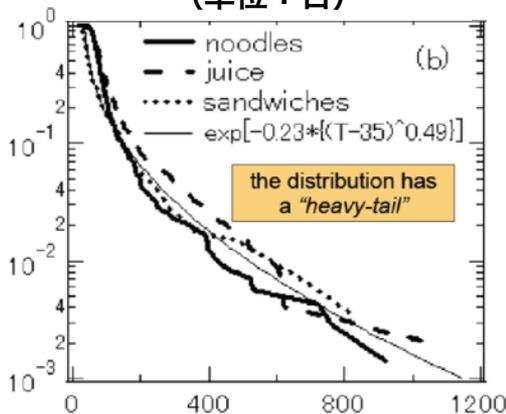
$$\approx \sqrt{\pi}(bt)^{-1/4} \exp(-2\sqrt{bt})$$

→ 寿命分布は指数 1/2 の stretched exponential

化石資料から算定した生物種 (科) の寿命分布 (skewed profile)

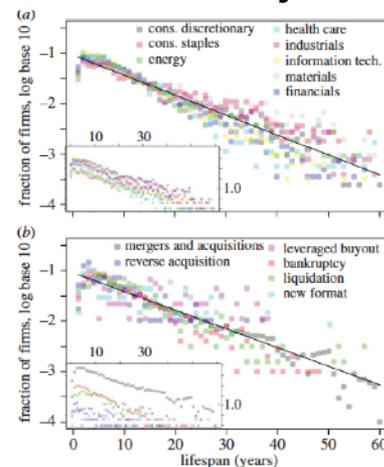


コンビニ商品の陳列寿命 (単位: 日)



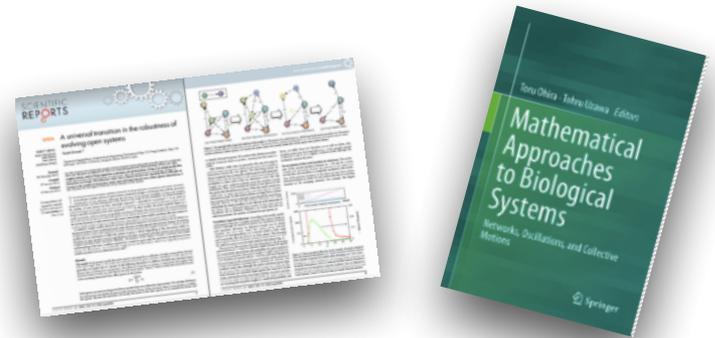
(T. Mizuno & M. Takayasu, PTP Suppl. 179, 71 (2009))

会社の Mortality Rate



(M. I.G. Daep et al., Roy. Soc. Interface (2015))

T. Shimada, S. Yukawa, & N. Ito *Int. J. of Mod. Phys. C* 14, 1267-1271 (2003)
Y. Murase, T. Shimada, & N. Ito, *New J. of Physics* (2010) (**NJP Best of 2010**)



参考文献：

- Y. Murase, T. Shimada, & N. Ito, *New Journal of Physics* vol. 12, 063021 (2010) (*New J. of Phys. Best of 2010*)
- T. Shimada, *Scientific Reports* Vol. 4, 4082 (2014)
- T. Shimada, in *Mathematical Approaches to Biological Systems* (Springer, 2015) , p. 95-117.
- F. Ogushi, J. Kertesz, K. Kaski, and T. Shimada, *Scientific Reports* vol. 7, 6978 (2017)

生物物理 58 (5), 001-004 (2018)
DOI: 10.2142/biophys.58.001
受理日: 2018年5月15日

トピックス

“生態系”諸行無常と頑健性の統計物理学

島田 尚
村瀬洋介
小串典子

東京大学工学系研究科システム創成学専攻/数理・情報教育研究センター
理化学研究所計算科学研究センター
物質・材料研究機構統合型材料開発・情報基盤部門/京都大学高等研究院