Multifractal Random Walk と News Impace

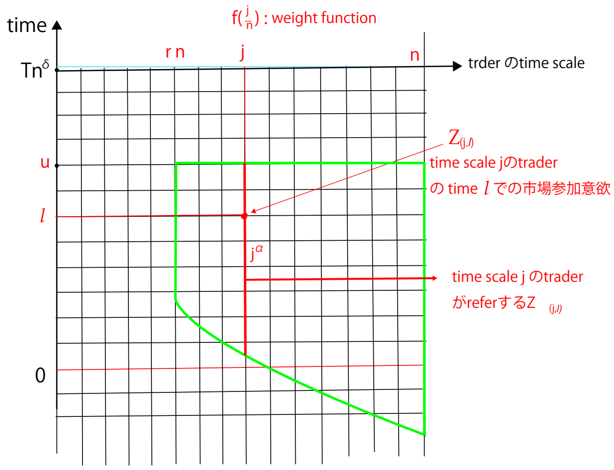
黒田耕嗣 (日本大学大学院総合基礎科学研究科)

Multifractal Random Walk の構成

$$X(t) = \lim_{r \downarrow 0} \int_0^t \left(\frac{e^{w_r(u)}}{E[e^{w_r(u)}]} \right)^{\frac{1}{2}} dB_u$$

- $w_r(u)$: Log-volatility process, B.M. B_u と独立
- $\lim_{r\downarrow 0} E[e^{w_r(u)}] = \infty \Longrightarrow \lim_{r\downarrow 0}$ と積分との順序交換は不可
- $w_r(u)$ を離散モデルのスケール極限として定める.

離散モデルの設定



- $Z_{(j,\ell)} \in \{-M, \cdots, 0, \cdots, M\}$; time scale j の trader の時点 ℓ における市場参加意欲を表す random media.
- time scale j の trader は Tj^α 前までの情報を取り入れる.

$$W_r^{(n)}(u) = \sum_{j=rn}^{n-1} f(\frac{j}{n}) \sum_{u-Tj^\alpha < \ell \leq u} Z_{(j,\ell)} + g(n) \sum_{u-Tn^\alpha < \ell \leq u} Z_{(n,\ell)}$$

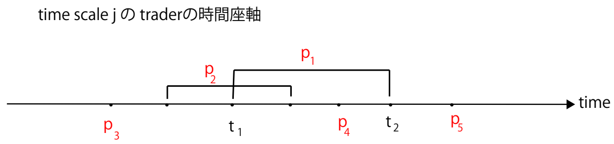
Media $\{Z_{(j,\ell)}\}$ の間の相互作用 $\Longrightarrow$ Long Memory Interaction を与える

- Interaction は j ごと独立
- time scale j の Media $\{Z_{(j,\ell)}\}_\ell$ の配置を Polymer で表現

$$\mathbf{p} = \begin{cases} (s; v; t) & (\text{type } 1\ ) \\ (s; t_1, t_2; v_1, v_2) & (\text{type } 2) \end{cases}$$

$s \in \{+1, -1\}$: $volatility sign, v$: $Z_{(j,\ell)}$ の絶対値, $t_1 < t_2$: 時間

$$0 < t_2 - t_1 \leq T n^{\gamma} \quad (\ \gamma \text{ の導入})$$



Polymer の出現頻度

$$\varphi(\mathbf{p}) = \begin{cases} \dfrac{c_1}{n^d} & \mathbf{p} = (s; v; t) \\ \dfrac{c_2}{n^{2d}} \cdot \dfrac{1}{(t_2 - t_1)^{\beta}} \cdot P(v_1) \cdot P(v_2) & \mathbf{p} = (s; v; t_1, t_2) \end{cases} \qquad (\beta \text{の導入})$$

$d = \gamma(1 - \beta)$, $P(\cdot)$ は v についての確率分布で

$$\mu_1 = E[v], \quad \mu_2 = E[v^2]$$

polymer の出現は独立になされ, time scale j ごと確率分布は独立に定義される.

Scale Process

$$Y_r^{(n)}(t) = \frac{1}{c(n)} W_r^{(n)}(n^{\delta} t) \qquad (\ \delta \text{ の導入})$$

Theorem 1

(1) $\alpha = \delta < \gamma$ のとき有限次元分布の意味で, $Y_r^{(n)}(u) \to w_r(u) \quad (n \to \infty)$ となり, $\{w_r(u)\}_{0 \le u \le T}$ は Gaussian Process で次が成立:

$$(1) \quad \mathrm{V}(w_r(t)) = T b_1 \mu_2 \left(\int_r^1 f^2(x) x^\alpha dx + 1 \right)$$

$$(2) \quad t_1 < t_2 \text{ のとき}$$

$$\mathrm{Cov}(w_r(t_1), w_r(t_2)) = b_1 \mu_2 \left(\int_{(\frac{t}{T})^{\frac{1}{\alpha}}}^1 f_r^2(x)(T x^\alpha - t) dx + (T - t) \right)$$

ここで, $t = t_2 - t_1$.

(2) $\alpha = \delta > \gamma$ のとき
有限次元分布の意味で, $Y_r^{(n)}(t) \to w_r(t) \quad (n \to \infty)$ となり, $\{w_r(t)\}$ は Gaussian Process で次が成立:

$$(1) \quad \mathrm{V}(w_r(t)) = (b_1 \mu_2 T + b_3 \mu_1^2 T^{2-\beta}) \cdot \left(\int_r^1 f^2(x) x^\alpha dx + 1 \right)$$

$$(2) \quad t_1 < t_2 \text{ のとき}$$

$$\mathrm{Cov}(w_r(t_1), w_r(t_2)) = (b_1 \mu_2 + b_3 \mu_1^2 T^{1-\beta}) \cdot \left(\int_{(\frac{t}{T})^{\frac{1}{\alpha}}}^1 f_r^2(x)(T x^\alpha - t) dx + (T - t) \right)$$

Proposition 2

$\alpha = \delta < \gamma$ or $\alpha = \delta > \gamma$ のとき, 次が成り立つ：

$$E[|Y_r^{(n)}(s) - Y_r^{(n)}(u)|^2 \cdot |Y_r^{(n)}(t) - Y_r^{(n)}(s)|^2] \le C_0 |t - u|^2 \quad (0 \le u < s < t \le T)$$

これにより, $Y_r^{(n)}(u) \to w_r(u)$ の収束は有限次元分布の意味だけでなく, path space 上の Probability Measure の弱収束の意味での収束性がえられた.

Multifractality について

$X(t)$ が Multifractality を満たすとは, $E[|X(t+\ell)-X(t)|^q] = K_q \ell^{\zeta_q}$ となり, ζ_q が non-linear となること.

Proposition 3

$\alpha = \delta < \gamma$ or $\alpha = \delta > \gamma$ のとき,

$$f(u) = \frac{\sqrt{\alpha}}{u^{\frac{1}{2}(\alpha+1)}} \quad \text{とすると,} \quad w_{\lambda r}(\lambda^\alpha t) \sim w_r(t) + D_\lambda \quad (0 < \lambda < 1)$$

が成り立ち, D_λ は $w_r(t)$ $D_\lambda \sim \mathrm{N}(0,\, -\alpha T b_1 \mu_2 \log \lambda)$

Multifractal Random Measure $M_r(0,t)$

以後, Proposition 3 の仮定の元で考える.

$$Q_r(u) = \frac{e^{\omega_r(u)}}{E[e^{\omega_r(u)}]}$$

とおくと, 各 u に対して, $\{Q_r(u)\}_r$ は $\mathfrak{F}_r$-Martingale となる.
さらに, Multifractal Random measure を次で定める：

$$M_r(0,t) = \int_0^t Q_r(u) du$$

Kahane Jean Pierre の Random measure に関する結果を用いると. 確率 1 で

$$M_r(0,t) \to M(0,t) \quad \text{weakly as} \quad r \downarrow 0$$

が言える.

Proposition 4 $\frac{1}{2} b_1 \mu_2 < 1$ のとき,

$$E[M(0,t)^q] = \int_0^t du_1 \cdots \int_0^t du_q \prod_{1 \le i,j \le q; i \ne j} \frac{1}{|u_i - u_j|^{\frac{1}{2} b_1 \mu_2}}$$
$$= \left(\frac{t}{T}\right)^{(1+\frac{1}{2}b_1\mu_2)q - \frac{1}{2}b_1\mu_2 q^2} \int_0^T dv_1 \cdots \int_0^T dv_q \prod_{1 \le i,j \le q; i \ne j} \frac{1}{|v_i - v_j|^{\frac{1}{2} b_1 \mu_2}} \quad (u_i = \frac{t}{T} v_i)$$

Exogeneous Shock と Multifractal Random Walk

離散モデルにおいて, 時間区間 $[0, n^\lambda]$ $(0 < \lambda < 1)$ から出発する Polymers について, v_1, v_2 の値を n^ξ $(0 < \xi < 1)$ することによって News Impact を与える. また, これらの Polymers については weight function を $g(x)$ とし, さらに time scale j の trader は $Tj^{\alpha'}$ 過去までの情報を参照するとする.

Theorem 2

$\alpha = \delta < \gamma, 2\xi + \lambda = \alpha$ のとき $c(n) = n^{\frac{1}{2}(1+\alpha-\gamma(1-\beta))}$ とすると, 有限次元分布の収束の意味で $W_r^{(n)}(n^\alpha t)$ は $w_r(t) + m_r(t)$ に収束し, $w_r(t)$ と $m_r(t)$ は独立で, $w_r(t)$ は前と同じ Gaussian Process. $m_r(t)$ も Gaussian Process で, 次が成立する.

$$V(m_r(t)) = b_3'\mu_1^2 T^{1-\beta}\left(\int_{t^{\frac{1}{\alpha}}}^{1} dx g_r^2(x) + 1\right)$$
$$\mathrm{Cov}(m_r t_1, m_r(t_2)) = 0$$

$g(x)$ を

$$g(x) = \frac{\sqrt{\alpha'}}{x^{\frac{1}{2}(\alpha'+1)}}$$

で定めると,

$$V(m_r(t)) = b_3\mu_1^2 T^{1-\beta}\left(\int_{t^{\frac{1}{\alpha}}}^{1} \frac{\alpha'}{x^{\alpha'+1}} dx + 1\right) = \frac{b_3\mu_1 T^{1-\beta}}{t^{\frac{\alpha'}{\alpha}}}$$

◎ $\alpha' < \alpha$ とすると, News Shock による log-volatility の減衰のスピードが $\frac{1}{t^{\frac{\alpha'}{\alpha}}}$ となる. News Impact に対しては time scale が長くなっても, weigt の減衰を元のものよりゆっくりとすることによって, News Impact による log -volatility の減衰スピードがゆっくりとなる.