統数研共同研究集会「経済物理とその周辺」H24研究会2回目
キヤノングローバル戦略研究所丸の内オフィス
2012年8月27日

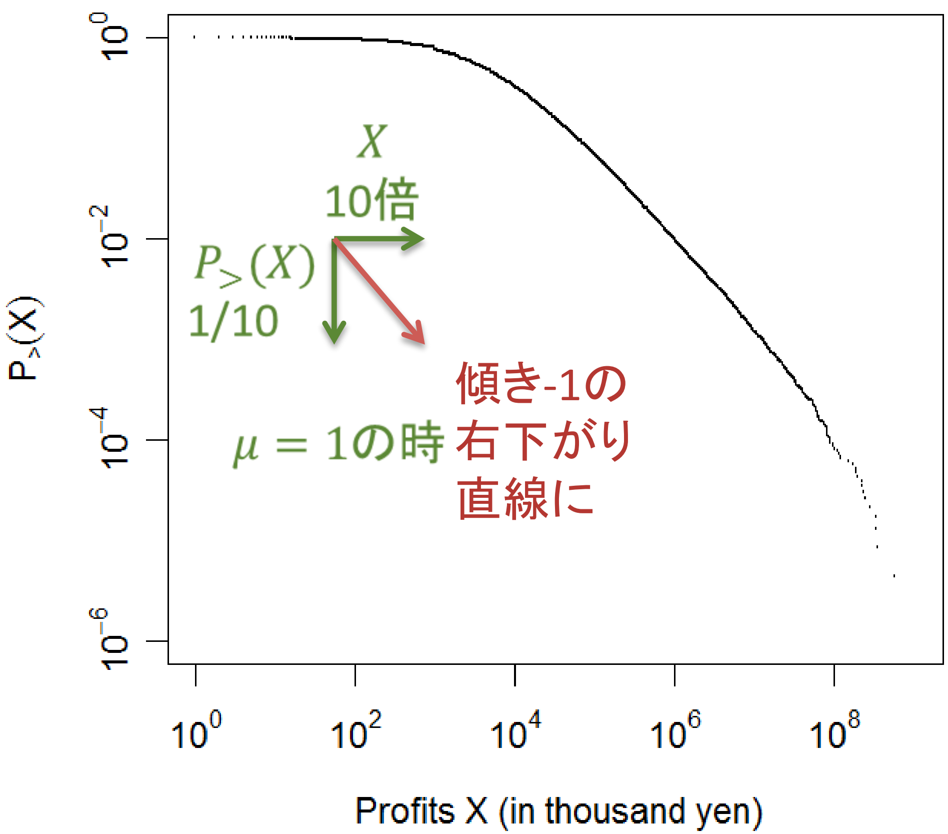
コブ･ダグラス型生産関数とジブラ則

藤本 祥二　（キヤノンIGS，金沢学院大）
石川 温　（金沢学院大）
水野 貴之　（キヤノンIGS，筑波大）
渡辺 努　（キヤノンIGS，東大）

アウトライン

- 基礎事項（ベキ分布、ジブラ則、詳細釣合則）
- 詳細準釣合則とジブラ則の修正
- 空間的準反転対称性
- ３次元空間への拡張
- コブ･ダグラス型生産関数とジブラ則

ベキ分布

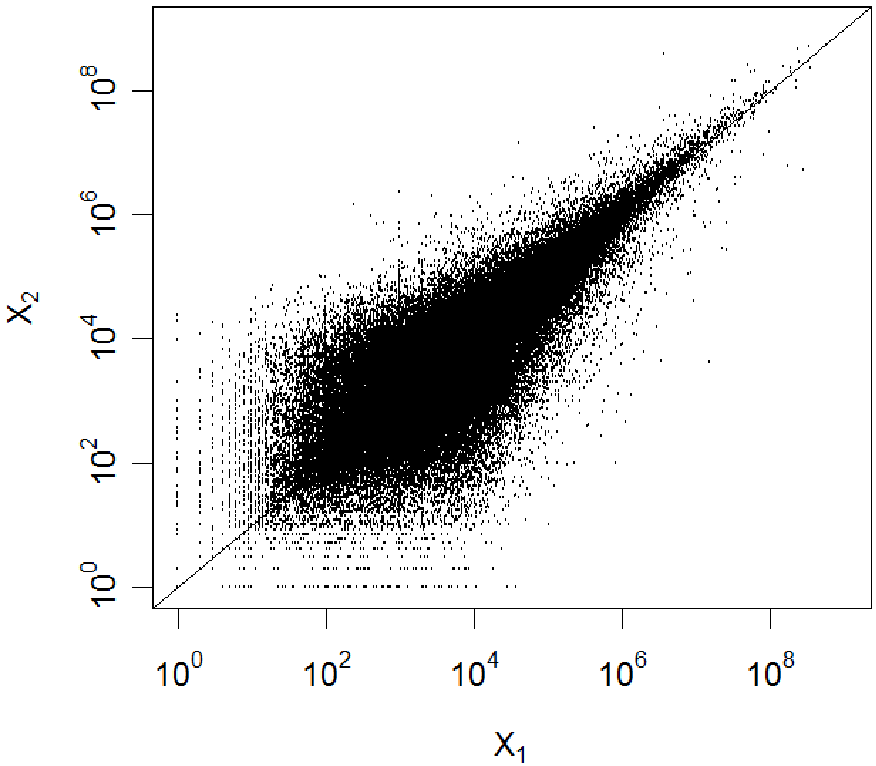


2004年日本企業の利益データX（千円）
TOKYO SHOKO RESEARCH,LTD

- 累積確率関数
  $$P_>(X) = CX^{-\mu}$$
  （μ:パレート指数）
- 確率密度関数
  $$P(X) = CX^{-\mu-1}$$
- スケーリングが特徴
  $$P_>(AX) = A^{-\mu}P_>(X)$$
  XをA倍すると確率は$1/A^{\mu}$になる。

（両対数プロットで直線）

ジブラ則（Gibrat's Law）

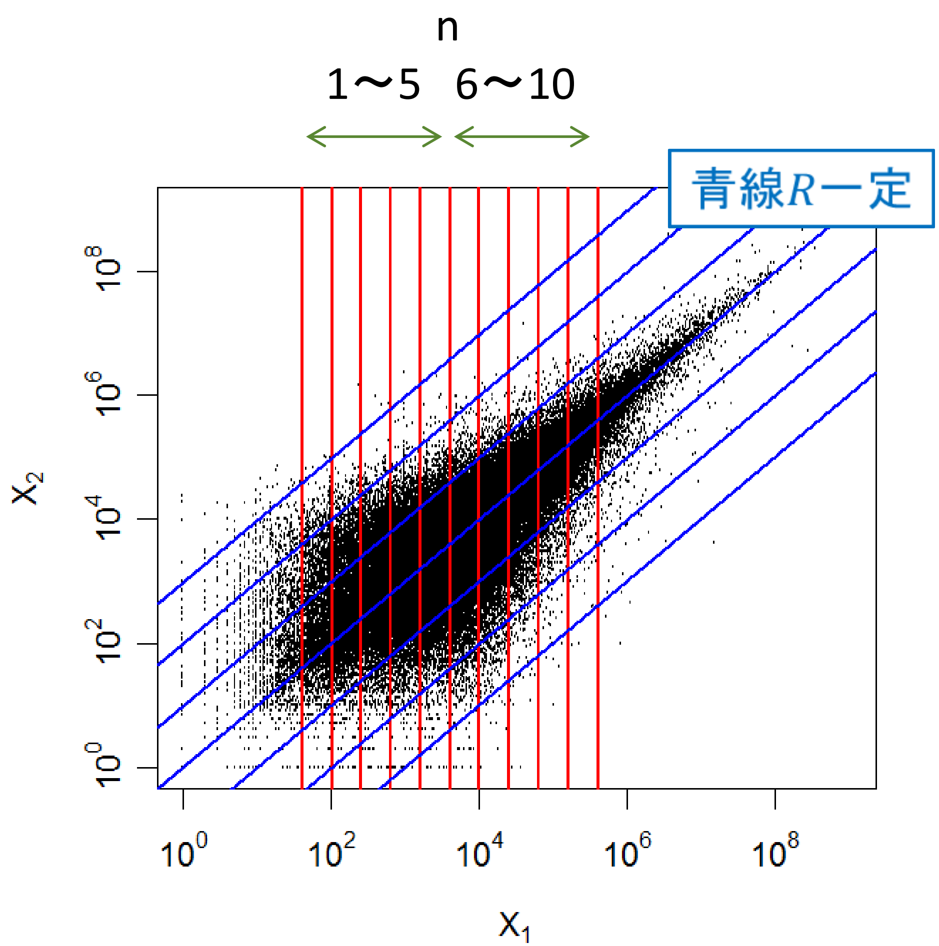


X_1:2004年
X_2:2005年

- 成長比率$R = \frac{X_2}{X_1}$の条件付確率密度関数
$$Q(R|X_1)$$
が条件X_1に依らずに同じ関数$Q(R)$になる。

$$Q(R|X_1) = Q(R)$$

ジブラ則（Gibrat’s Law）



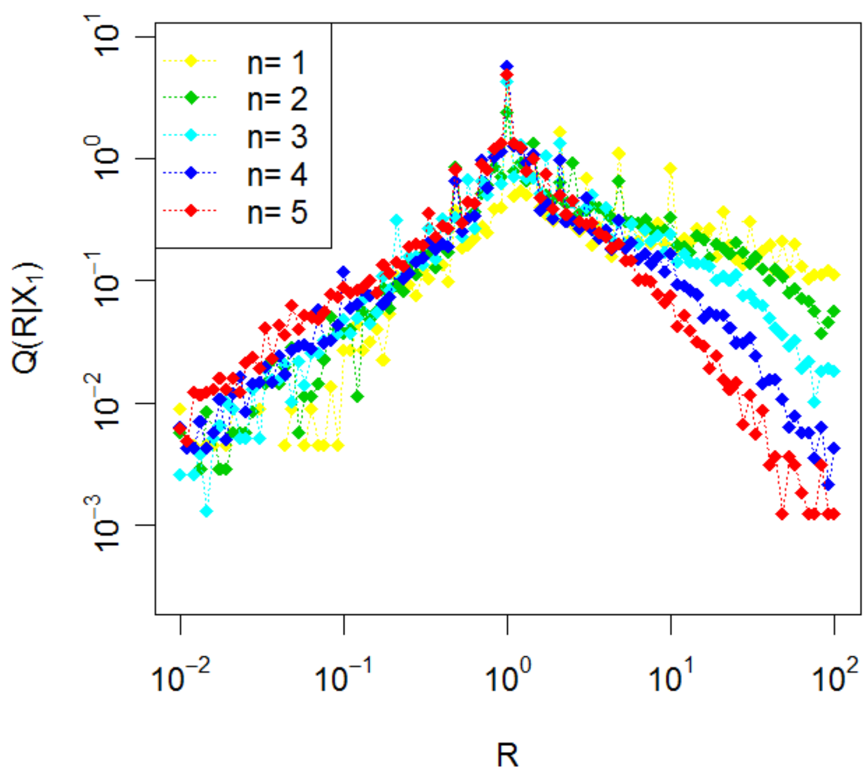
X_1:2004年
X_2:2005年

- 成長比率$R = \frac{X_2}{X_1}$の条件付確率密度関数
$Q(R|X_1)$
が条件X_1に依らずに同じ関数$Q(R)$になる。

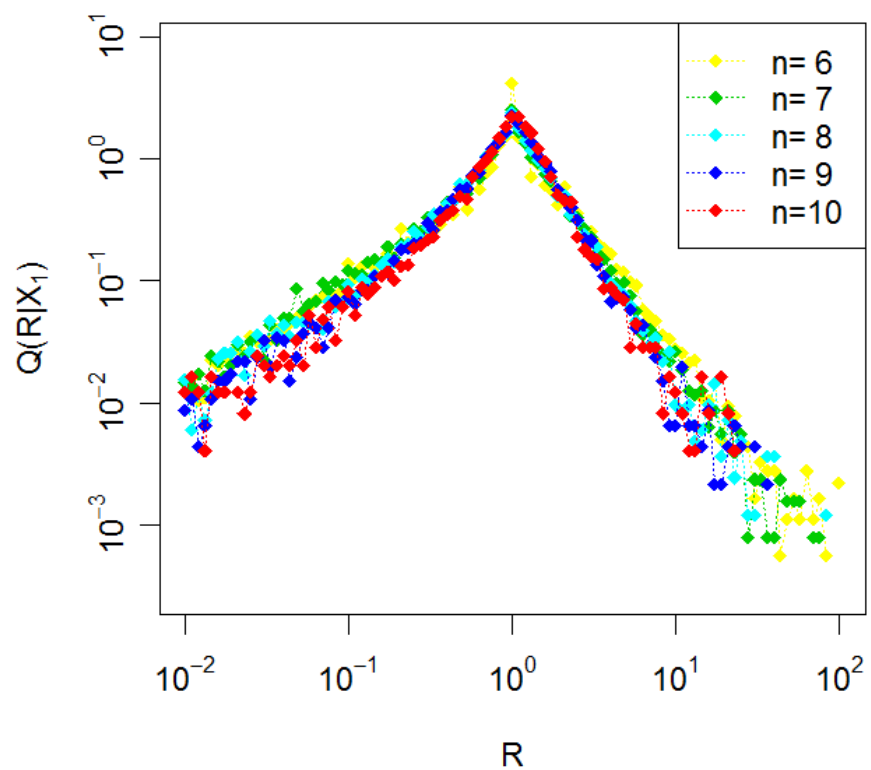
$$Q(R|X_1) = Q(R)$$

ジブラ則をデータで確認

前半5つ：ベキ分布じゃない領域では
$Q(R|X_1)$はX_1の条件で形が変わる。



後半5つ：ベキ分布の領域では
$Q(R|X_1)$はX_1の条件で形が変わらない。



ジブラ則から導かれること

- 同時確率密度関数の間の関係（変数変換）

$$X_1 P_{12}(X_1, X_2) = P_{1R}(X_1, R)$$
$$X_2 P_{12}(X_1, X_2) = P_{R^{-1}2}(R^{-1}, X_2)$$

- 条件付き確率（定義式⇒ジブラ則を適用）

$$Q_R(R|X_1) = \frac{P_{1R}(X_1, R)}{P_1(X_1)} \Longrightarrow P_{1R}(X_1, R) = P_1(X_1) Q_R(R)$$
$$Q_{R^{-1}}(R^{-1}|X_2) = \frac{P_{R^{-1}2}(R^{-1}, X_2)}{P_2(X_2)} \Longrightarrow P_{R^{-1}2}(R^{-1}, X_2) = P_2(X_2) Q_{R^{-1}}(R^{-1})$$

- これらの式を組み合わせる

ジブラ則から導かれること

- 確率の関数の定義とジブラ則から導かれる式

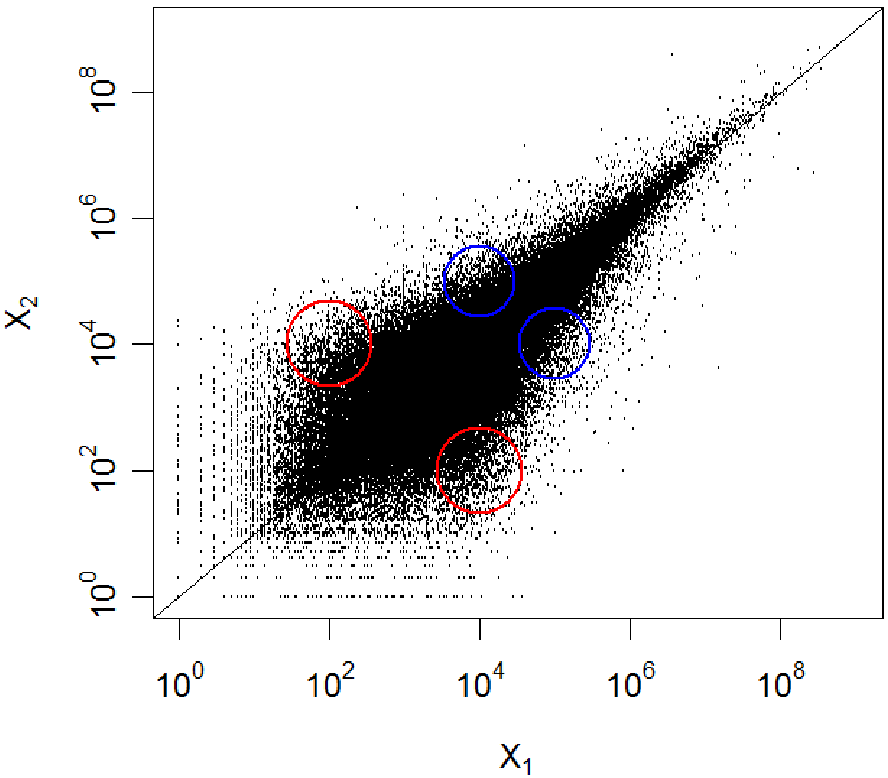
$$\frac{P_1(X_1)}{P_2(X_2)} = \frac{1}{R}\frac{Q_{R^{-1}}(R^{-1})}{Q_R(R)}, \quad \text{右辺は}R = \frac{X_2}{X_1}\text{のみ関数}$$

- 上の式から分かること

$$\frac{P_1(AX_1)}{P_2(AX_2)} = \frac{P_1(X_1)}{P_2(X_2)}$$

$P_1(X_1)$と$P_2(X_2)$のスケーリングは同じ

詳細釣合則



- $X_1 \Leftrightarrow X_2$の入れ替えで同時分布が対称

$$P_{12}(X_1, X_2) = P_{12}(X_2, X_1)$$

ジブラ則＋詳細釣合則

- ジブラ則から導かれる関係式

$$\frac{P_1(X_1)}{P_2(X_2)} = \frac{1}{R}\frac{Q_{R^{-1}}(R^{-1})}{Q_R(R)}$$

- 詳細合則を課すと、次の同じ関数形に

$$P_1(\cdot) = P_2(\cdot) \equiv P(\cdot)$$
$$Q_R(\cdot) = Q_{R^{-1}}(\cdot) \equiv Q(\cdot)$$

- 解析解が得られる簡単な関係式に

$$\frac{P(X_1)}{P(X_2)} = \frac{1}{R}\frac{Q(R^{-1})}{Q(R)}$$

ジブラ則＋詳細釣合則⟹ベキ分布

- 以下の式から$P(X)$の形が解析的に求まる。

$$\frac{P(X_1)}{P(X_2)} = \frac{1}{R}\frac{Q(R^{-1})}{Q(R)} \equiv G(R)$$

- $P(X) = P(XR)G(R)$を$R = 1 + \epsilon, (\epsilon \ll 1)$で展開して$\epsilon$の1次の項から微分方程式を得る。

$$G'(1)P(X) + XP'(X) = 0$$

- 微分方程式を解くとXはベキ分布、ベキ指数は成長率分布の$R = 1$付近の形から決まる。

$$P(X) = CX^{-\mu-1}, \qquad \mu = -2 - \frac{Q^{+'}(1) + Q^{-'}(1)}{Q(1)}$$

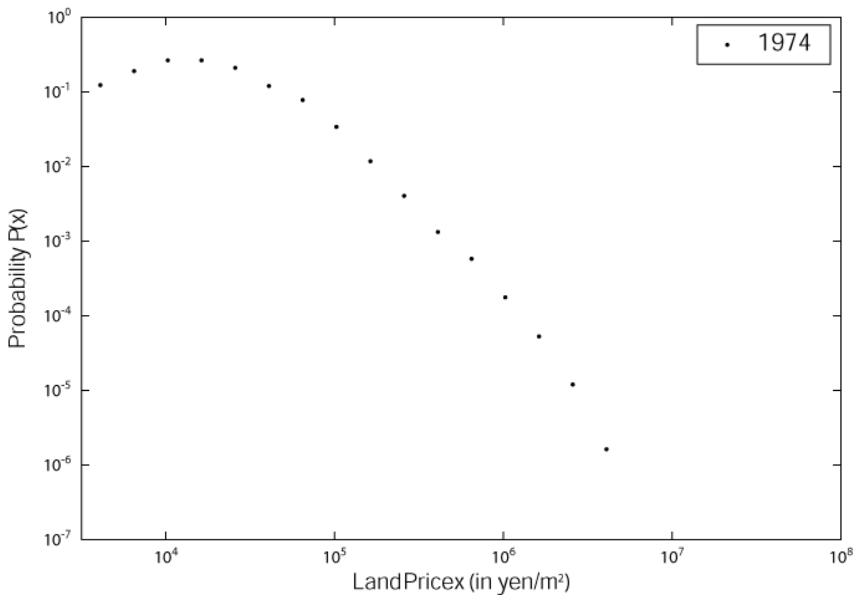
Fujiwara, Guilmi, Aoyama, Gallegati and Souma, Physica A 335 (2004) 197 – 216

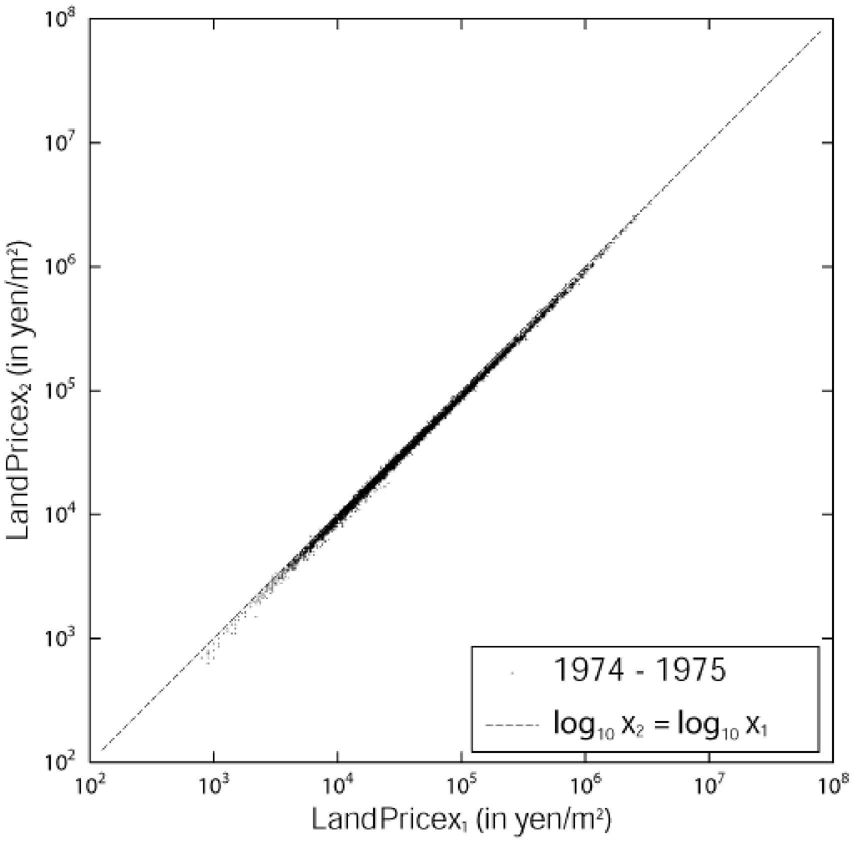
アウトライン

- 基礎事項（ベキ分布、ジブラ則、詳細釣合則）
- 詳細準釣合則とジブラ則の修正
- 空間的準反転対称性
- ３次元空間への拡張
- コブ･ダグラス型生産関数とジブラ則

土地価格データの分布

A. Ishikawa, Physica A 371 (2006) 525





ベキ指数が大きく変動する所で対称軸がずれる。

詳細準釣合則

- 対称軸がずれるので傾きθと切片$\log A$を導入

$$\log X_2 = \theta \log X_1 + \log A$$

$$\begin{Bmatrix} \text{詳細釣合則では} \\ A = 1, \theta = 1 \end{Bmatrix}$$

- $AX_1^\theta \Leftrightarrow X_2$の入れ替えで同時分布が対称

$$P_{12}(X_1, X_2)$$

$$= P_{12}\left((X_2/A)^{1/\theta}, AX_1^\theta\right)$$

- これで理論的な計算をやり直す
- べキ指数の変動も説明できるようになった

$$P_1(X_1) = C_1 X_1^{-\mu_1 - 1}$$

$$P_2(X_2) = C_2 X_2^{-\mu_2 - 1}$$

$$\theta = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

- ジブラ則は成長比Rを

$$R = \frac{X_2}{AX_1^\theta}$$

に修正すればよい

$$Q(R|X_1) = Q(R)$$

アウトライン

- 基礎事項（ベキ分布、ジプラ則、詳細釣合則）
- 詳細準釣合則とジブラ則の修正
- 空間的準反転対称性
- ３次元空間への拡張
- コブ･ダグラス型生産関数とジブラ則

空間的準反転対称性

- ここまでは$X_1 \to X_2$のような時間発展する量について考えてきた。

$$P_{12}(X_1, X_2) = P_{12}\left(\left(\frac{X_2}{AX_1}\right)^{1/\theta}, A{X_1}^{\theta}\right)$$

- 詳細準釣合則と同じような関係が別々の量$X \leftrightarrow Y$に関して成り立たないか？

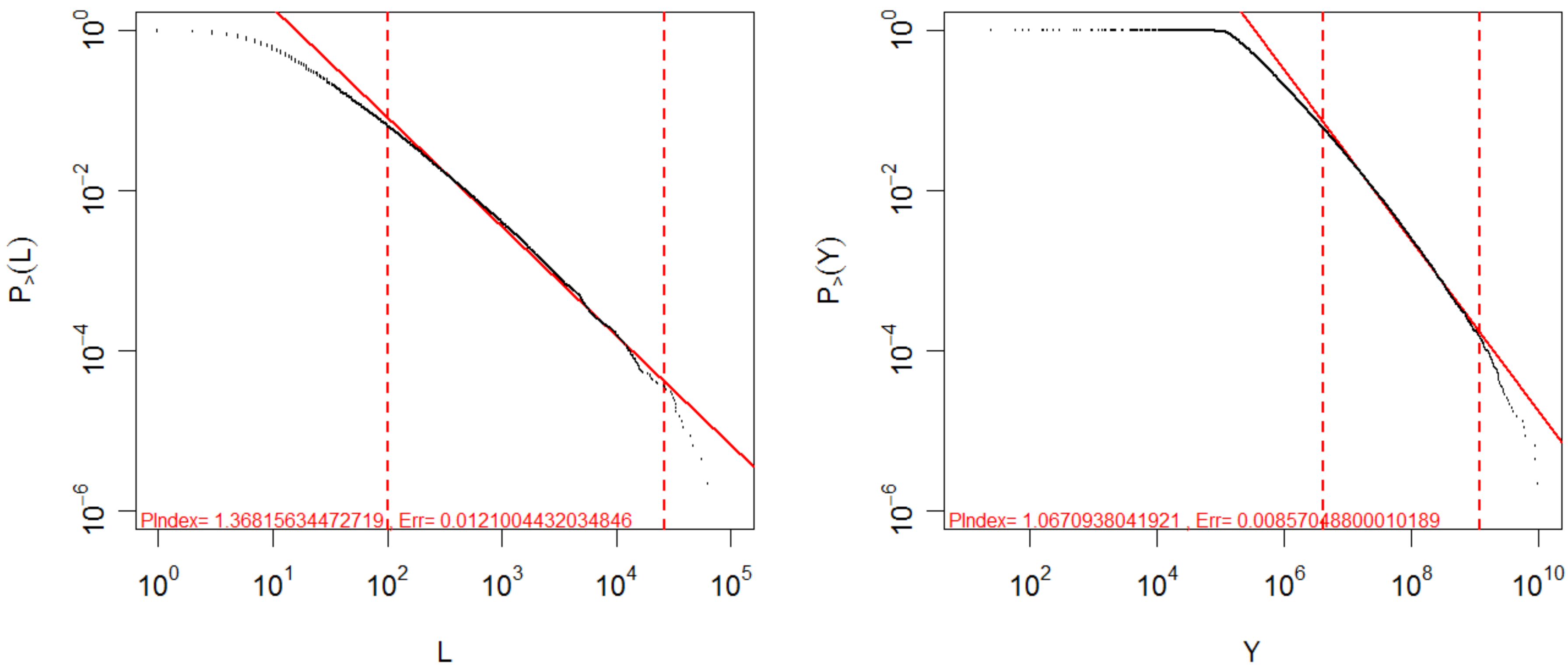
$$P_J(X, Y) = P_J\left(\left(\frac{Y}{AX}\right)^{1/\theta}, AX^{\theta}\right)$$

- 詳細釣合という名前は熱平衡の時間発展に関する性質を表してるので準反転対称性に名前を変える。
- 企業の従業員数Lと、売上Yについて調べた。

(L,Y)のベキ分布領域

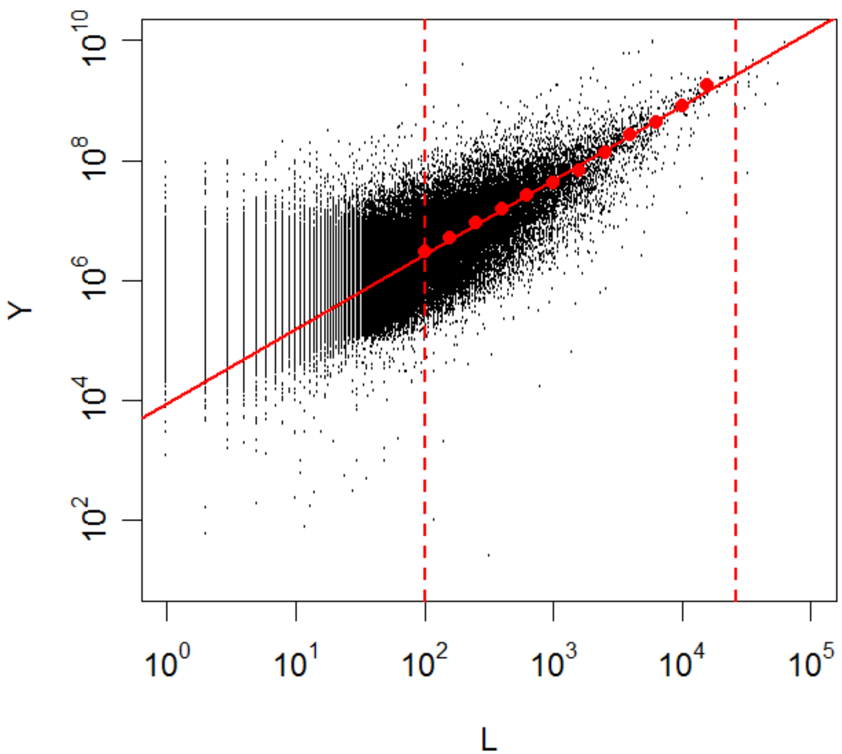
直線と見なせる領域を決定するアルゴリズム

Fujimoto, Ishikawa, Mizuno and Watanabe
http://www.economics-ejournal.org/economics/journalarticles/2011-20



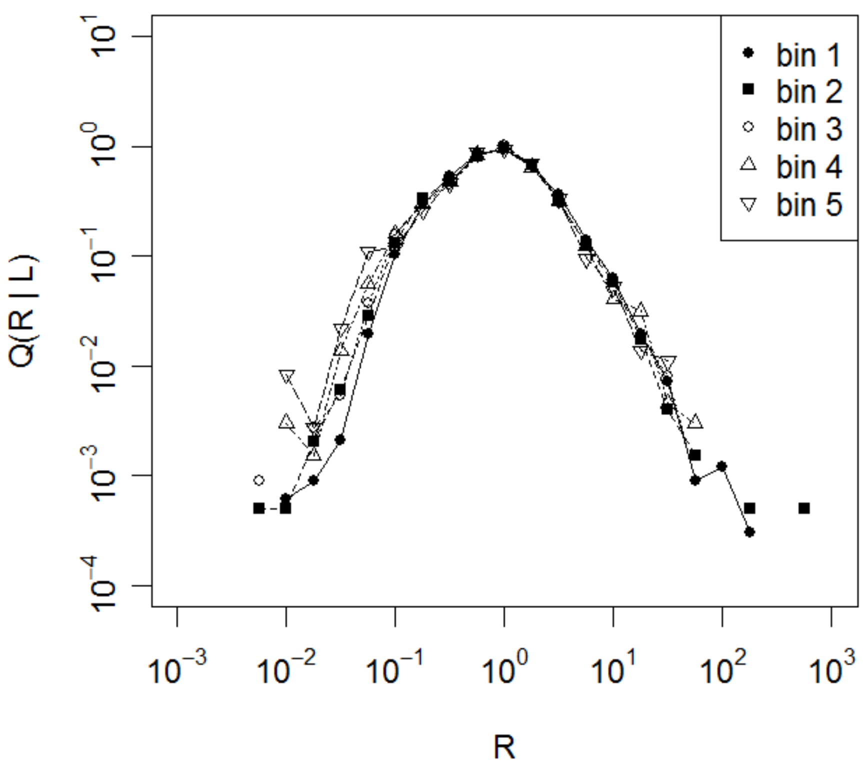
2004年日本企業の従業員数L（人）、売上Y（千円）
TOKYO SHOKO RESEARCH,LTD

(L, Y)の空間的準反転対称性



- Lのベキ領域を分割
- 各領域で$\langle \log Y \mid L \rangle$を求める。（赤丸印）
- $\theta \log L + \log A$でフィット
傾きθ, 切片$\log A$
- 得られた直線を空間的準反対称性の対称軸と見なす。

ジブラ則の確認



- （成長）比率Rを
$$R = \frac{Y}{AL^{\theta}}$$
に修正すると
- ジブラ則
$$Q(R|L) = Q(R)$$
を確認できる。

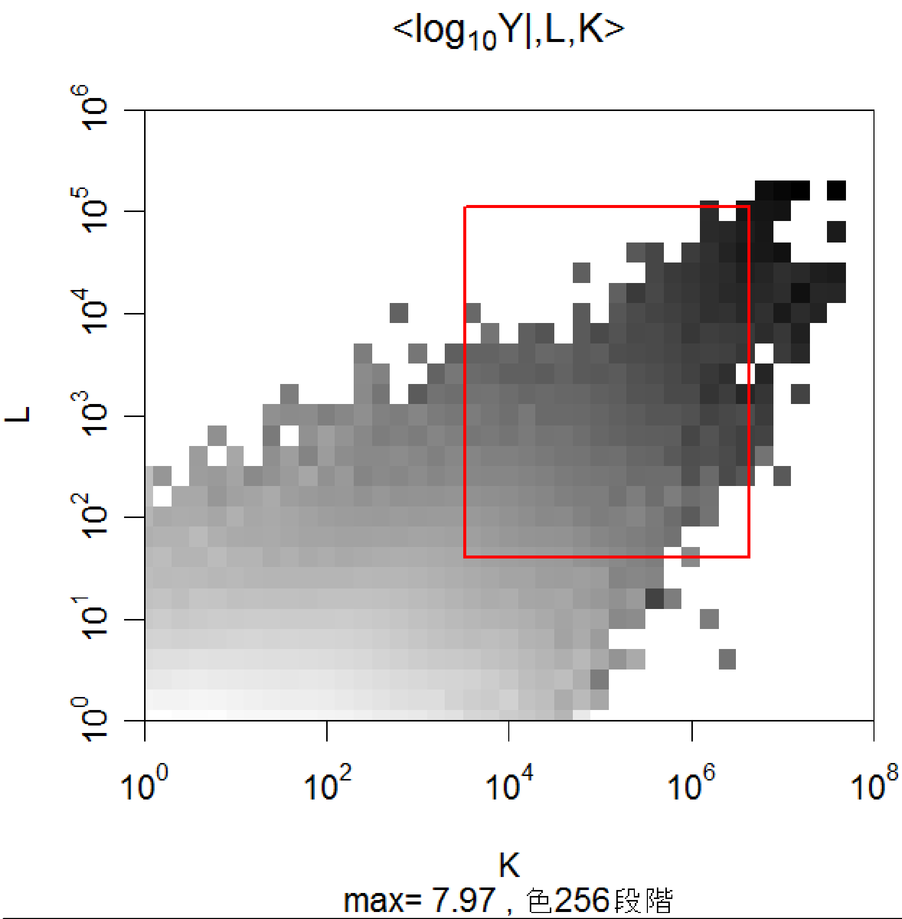
アウトライン

- 基礎事項（ベキ分布、ジブラ則、詳細釣合則）
- 詳細準釣合則とジブラ則の修正
- 空間的準反転対称性
- ３次元空間への拡張
- コブ･ダグラス型生産関数とジブラ則

３次元空間に拡張

- 有形固定資産K、従業員数L、売上Yの３次元に拡張
- Bureau van Dijk社のデータベース ORBISを利用
- (K, L, Y)の３次元空間に次の対称平面を考える。
$$\log Y = \alpha \log K + \beta \log L + \log A$$
- ３次元の同時分布で表現すると$Y \leftrightarrow AK^{\alpha}L^{\beta}$の入れ替えの対称性になる。
$$P_J(K, L, Y) = P_J\left(\left(\frac{Y}{AL^{\beta}}\right)^{1/\alpha}, \left(\frac{Y}{AK^{\alpha}}\right)^{1/\beta}, AK^{\alpha}L^{\beta}\right)$$

(α, β)の決定

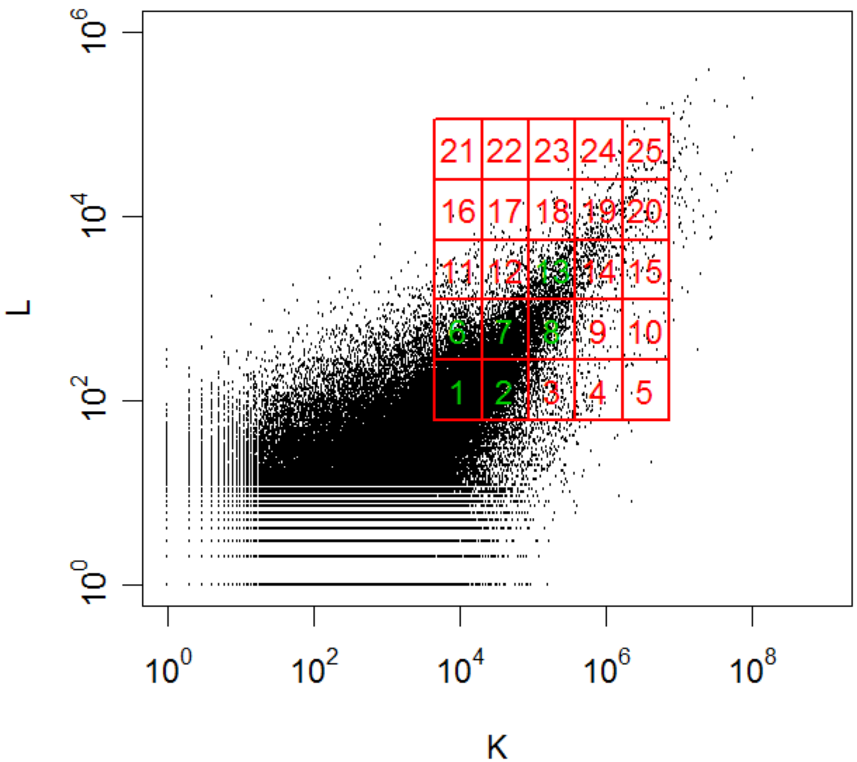


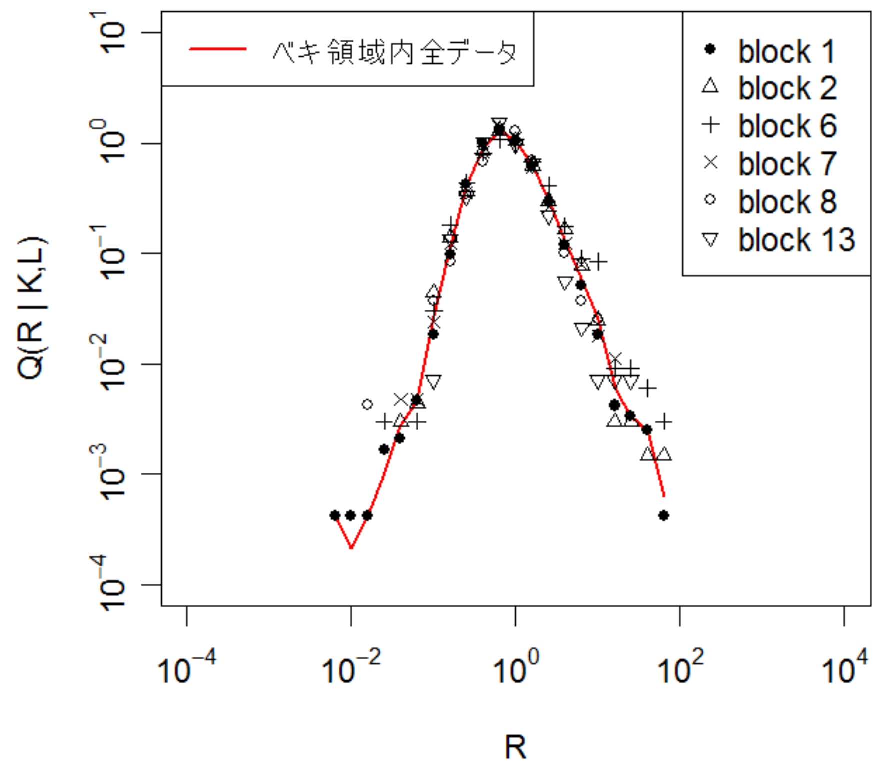
- K, Lをブロックに分けて、ある程度データ量のとれる部分を取り出す。
- 各ブロックで
  $\langle \log Y | K, L \rangle$を計算
- K, Lのベキ分布領域で
  $\alpha \log K + \beta \log L + \log A$

の関数形でフィット

2007年日本企業
設備資産K（ドル）、従業員数L（人）、売上Y（ドル）

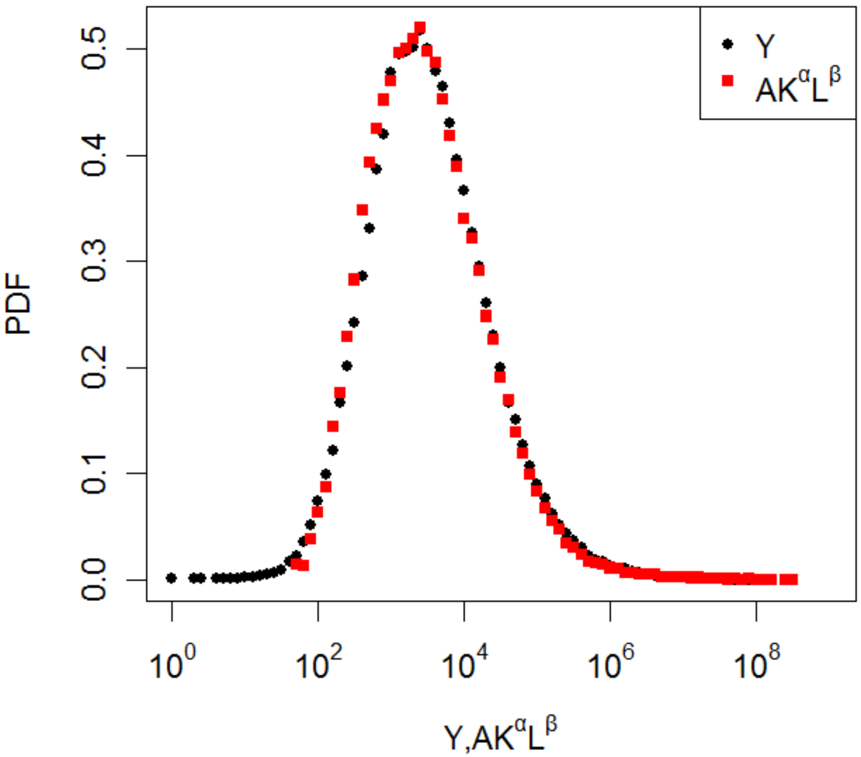
３次元版のジブラ則



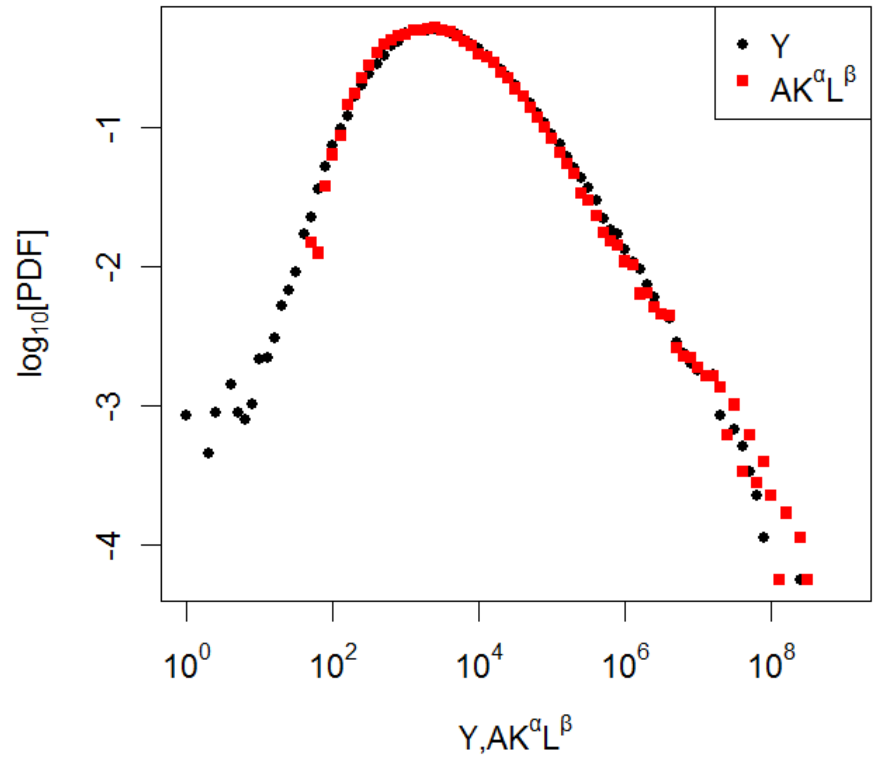


- フィットで求めたα, β, Aを使い各データの$R = \frac{Y}{AK^{\alpha}L^{\beta}}$を計算
- ベキ分布の領域を左図のようなブロックに分け、各ブロックで$Q(R|L, K)$の分布を調べる。
- $Q(R|L, K) = Q(R)$を確認

Yと$AK^{\alpha}L^{\beta}$の分布の比較



片対数表示

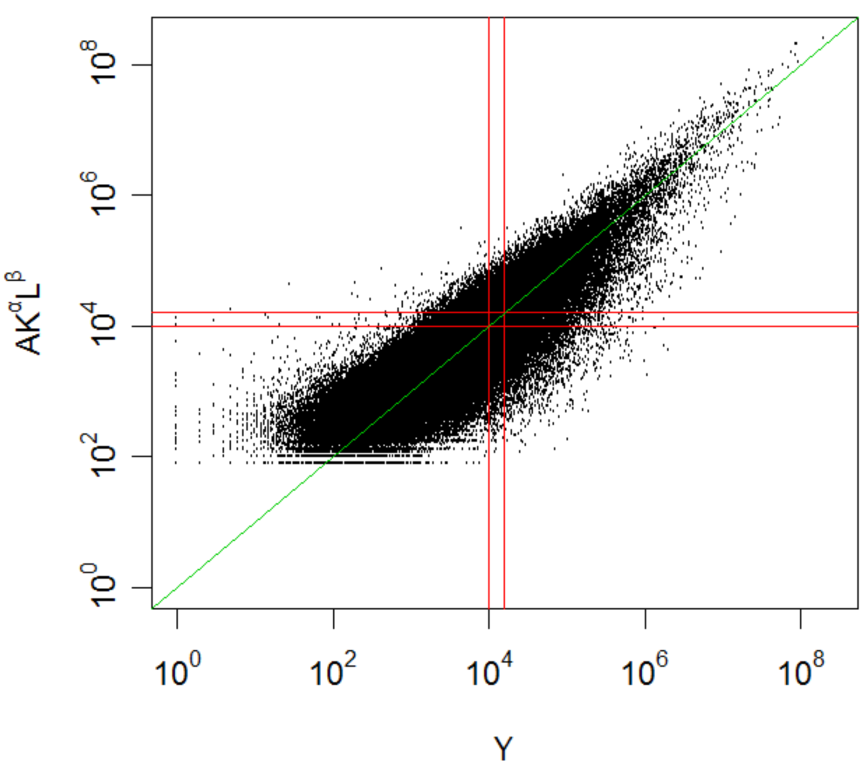


両対数表示

- フィットで求めたα, β, Aを使い各データの$AK^{\alpha}L^{\beta}$を計算
- 全領域でYと$AK^{\alpha}L^{\beta}$の確率密度関数を比較
- 下の方が合ってないので検定では棄却される。

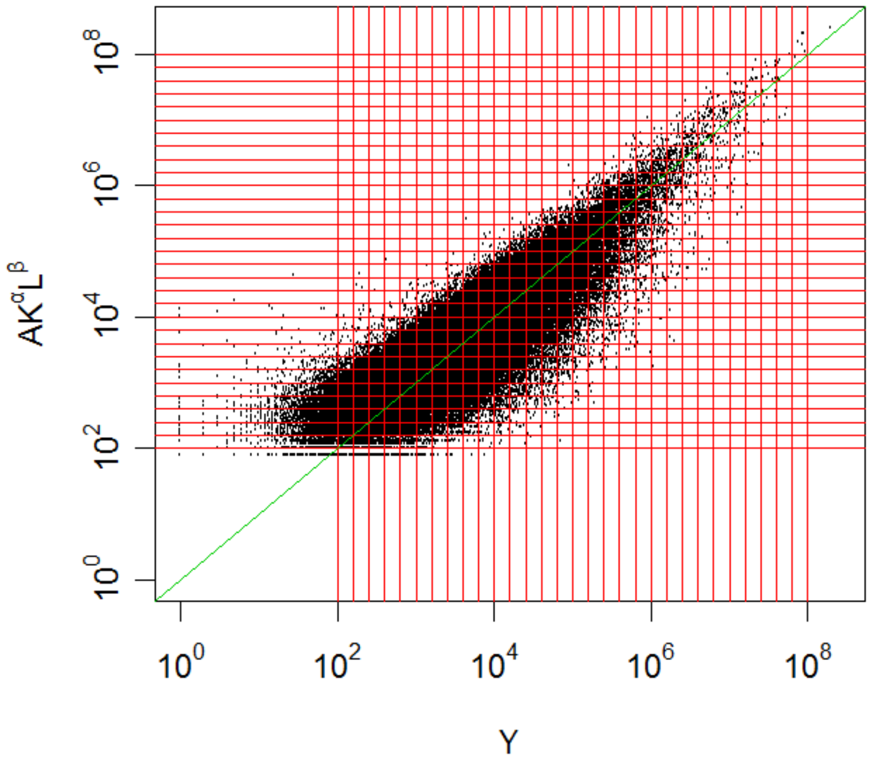
$Y \leftrightarrow AK^{\alpha}L^{\beta}$ 入れ替え対称性

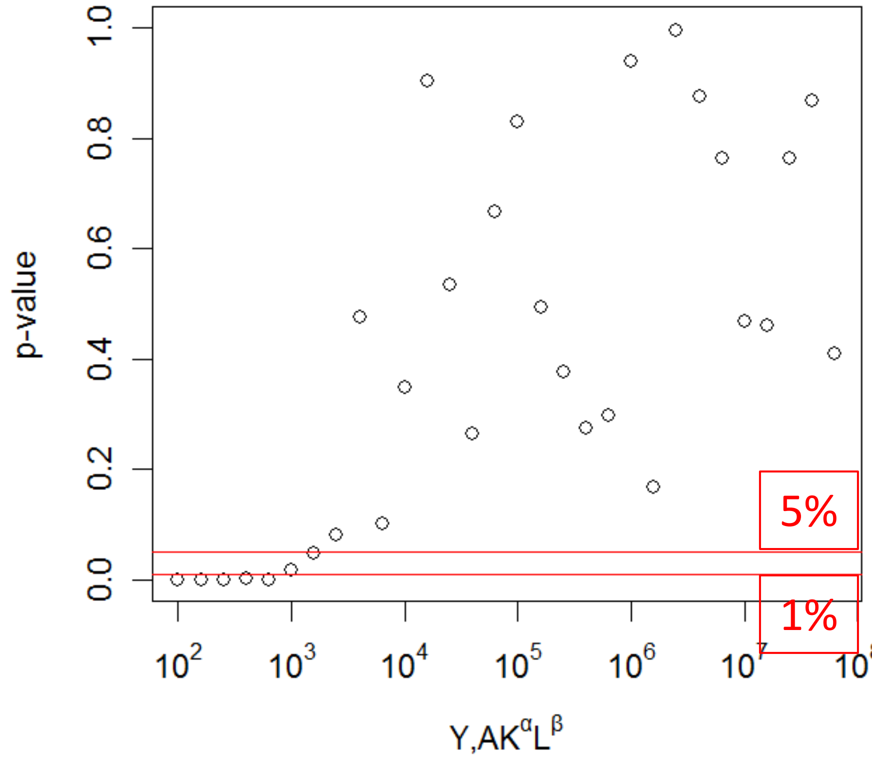
Yと$AK^{\alpha}L^{\beta}$の散布図



- $Y, AK^{\alpha}L^{\beta}$の散布図で細かな領域に分けて入れ替え対称性をみる。
- 赤のラインは反転して一致する領域
- 縦のラインの分布と、横のラインの分布をKS検定で比較（2つの分布が等しいという帰無仮説でノンパラメトリックに検定）

$Y \leftrightarrow AK^{\alpha}L^{\beta}$入れ替え対称性





- ベキ分布領域以外の領域では2つの分布が等しいという帰無仮説は棄却される。
- 10^4以上のベキ分布の領域では棄却されない。

アウトライン

- 基礎事項(ベキ分布、ジブラ則、詳細釣合則)
- 詳細準釣合則とジブラ則の修正
- 空間的準反転対称性
- ３次元空間への拡張
- コブ・ダグラス型生産関数とジブラ則

生産関数

- 生産するために行った投入量$X_1, X_2, \cdots, X_n$と生産量Yの関係が生産関数

$$Y = f(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

- k次同次関数

$$f(\lambda X_1, \lambda X_2, \cdots, \lambda X_n) = \lambda^k f(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

- 1次同次関数を使い、規模に関する収穫一定の判断
  資本Kと労働Lの生産関数$Y(K, L)$では

$$\lambda Y(K, L) > Y(\lambda K, \lambda L) \quad 収穫逓増$$

$$\lambda Y(K, L) = Y(\lambda K, \lambda L) \quad 収穫一定$$

$$\lambda Y(K, L) < Y(\lambda K, \lambda L) \quad 収穫逓減$$

（資本を2倍、労働を2倍にして工場を2倍にすると
生産が2倍になるのが収穫一定のイメージ）

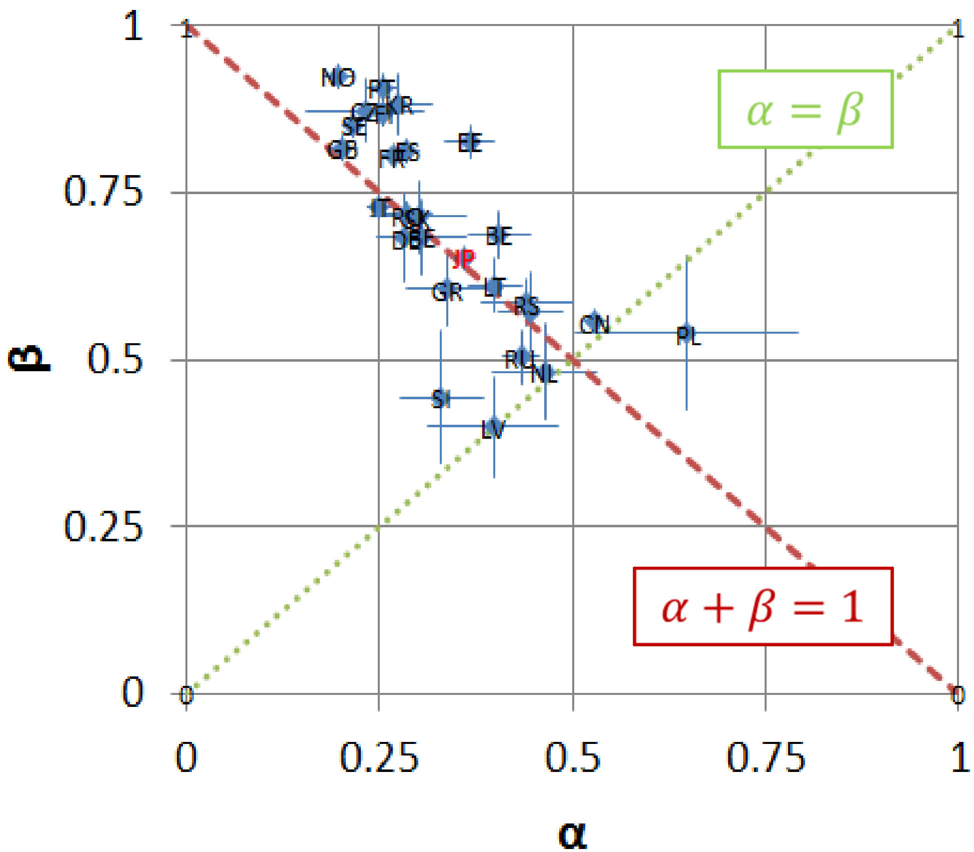
CES型生産関数の分類

- 生産量Y、資本K、労働Lに関する1次同次な生産関数の1つにCES型生産関数がある。
  (CES: Constant elasticity of substitution,代替の弾力性一定)
  $$Y(L,K) = A[\alpha K^{\gamma} + (1-\alpha)\, L^{\gamma}]^{1/\gamma}$$
- CES型はγによって様々なタイプに分けられる。
  – 線形型生産関数($\gamma = 1$)
  $$Y(L,K) = A[\alpha K + (1-\alpha)L\,]$$
  – レオンチェフ型生産関数($\gamma \longrightarrow -\infty$)
  $$Y(L,K) = A\min\{K,L\}$$
  – コブ･ダグラス型生産関数($\gamma \rightarrow 0$)
  $$Y(L,K) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$$

コブ・ダグラス型生産関数とジブラ則

- コブ・ダグラス型生産関数
$$Y(K,L) = AK^{\alpha}L^{\beta}$$
では、$\alpha + \beta = 1$の時1次同次$Y(\lambda K, \lambda L) = \lambda Y(K,L)$なので、ある種のスケーリングをしている。
- 3次元のジブラ則
$$R = \frac{Y}{AL^{\alpha}K^{\beta}}, \qquad Q(R|L,K) = Q(R)$$
からYの分布と$AL^{\alpha}K^{\beta}$の分布が、同じスケーリングをすることが分かる。
$AL^{\alpha}K^{\beta}$がλ倍になった時Yがλ倍になることが確率分布のレベルで言える。一次同次を課さなくても良い。
- ちなみに、技術Aを確率変数とみなすと、各企業のAの値は定数α, βとデータY, L, Kを使って$A = \frac{Y}{L^{\alpha}K^{\beta}}$の式から計算できる。$A$の分布は$R$の分布$Q(R)$を定数倍したものになる。

国別α, β



- 2007年27カ国
- 収穫一定のラインに沿って分布
- 殆どの国で$\alpha < \beta$

まとめ

- ジブラ則に注目することによって、確率分布のレベルで売上Yと同じスケーリングをする有形固定資産Kと従業員数Lの関数を求める手法を開発した。
- 関数形はコブ･ダグラス型生産関数$Y(K,L) = AK^{\alpha}L^{\beta}$と同じ形、$\alpha + \beta = 1$じゃなくてもスケーリングは満たされている。
- 弾性値α, βはスケーリング領域にある企業にとって大いに参考になる。
- 確率分布で決まる性質なのでどのような分類をするのかが重要になってくる。（国で分類するのか、業種で分類するのか等）